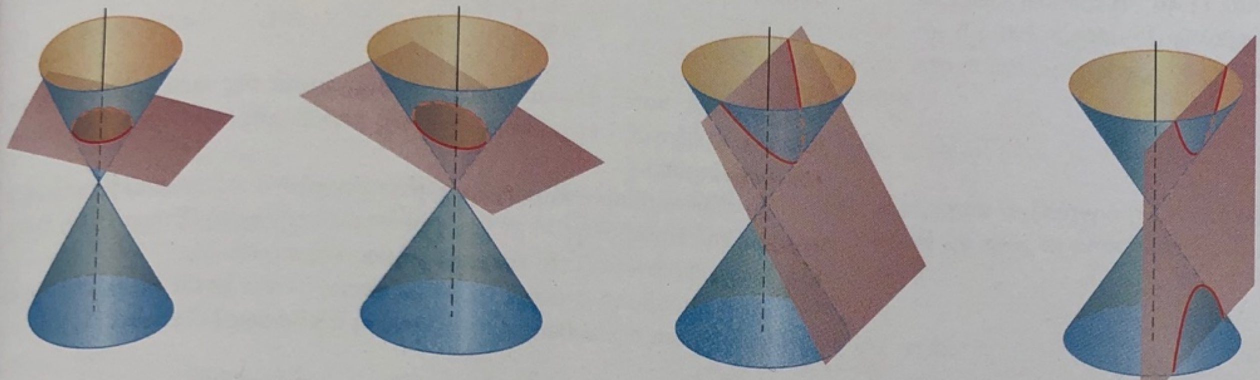
11.6 Κωνικές τομές

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε και μελετάμε τις παραβολές, τις ελλείψεις και τις υπερβολές γεωμετρικά και εξάγουμε τις πρότυπες καρτεσιανές τους εξισώσεις. Οι καμπύλες αυτές ονομάζονται *κωνικές τομές* ή *κωνικές* διότι σχηματίζονται αποκόπτοντας έναν διπλό κώνο με ένα επίπεδο (Σχήμα 11.39). Η γεωμετρική αυτή μέθοδος ήταν ο μόνος τρόπος με τον οποίο οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί μπορούσαν να περιγράψουν αυτές τις καμπύλες, καθώς δεν διέθεταν τα δικά μας εργαλεία των καρτεσιανών ή των πολικών συντεταγμένων. Στην επόμενη ενότητα εκφράζουμε τις κωνικές τομές σε πολικές συντεταγμένες.



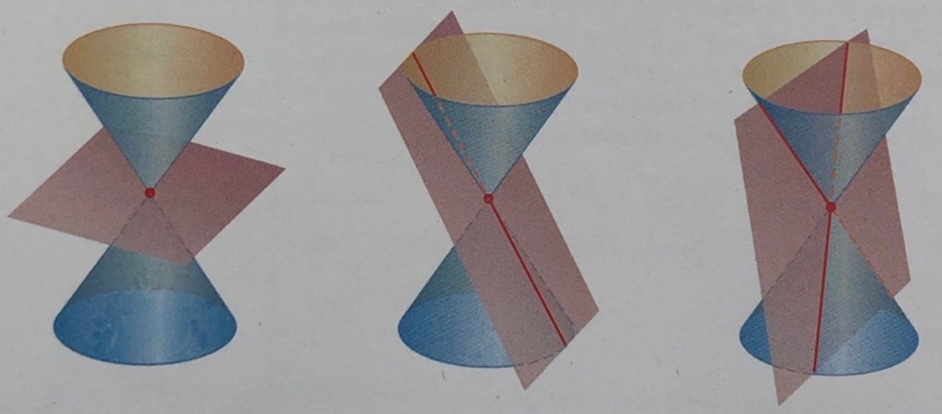
Κύκλος: επίπεδο κάθετο στον άξονα του κώνου

Έλλειψη: επίπεδο κεκλιμένο ως προς τον άξονα του κώνου

Παραβολή: επίπεδο παράλληλο στην πλευρά του κώνου

Υπερβολή: επίπεδο παράλληλο στον άξονα του κώνου

(α)



Σημείο: επίπεδο διερχόμενο μόνο από την κορυφή του κώνου

Ευθεία: επίπεδο εφαπτόμενο στον κώνο

Ζεύγος τεμνόμενων ευθειών

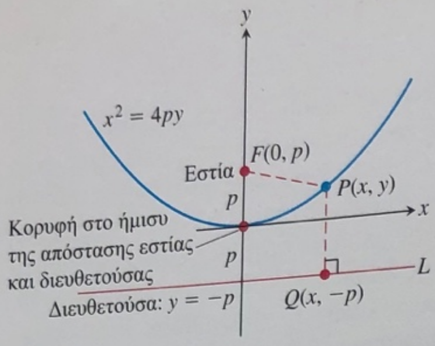
(β)

ΣΧΗΜΑ 11.39 Οι πρότυπες κωνικές τομές (α) είναι οι καμπύλες που αποκόπτονται από έναν *διπλό* κώνο με ένα επίπεδο. Οι υπερβολές εμφανίζουν δύο μέρη, που ονομάζονται *κλάδοι*. Το σημείο και οι ευθείες που προκύπτουν όταν το επίπεδο διέρχεται από την κορυφή του κώνου (β) είναι *εκφυλισμένες* κωνικές τομές.

Παραβολή

ΟΡΙΣΜΟΙ Το σύνολο που αποτελείται από όλα τα σημεία ενός επιπέδου που το καθένα τους ισαπέχει από δεδομένο σταθερό σημείο και δεδομένη σταθερή ευθεία του επιπέδου αποτελεί μια **παραβολή**. Το σταθερό σημείο είναι η **εστία** της παραβολής. Η σταθερή ευθεία είναι η **διευθετούσα** της.

Αν η εστία F ανήκει στη διευθετούσα L, η παραβολή εκφυλίζεται σε ευθεία που διέρχεται από το F κάθετα στην L. Στο εξής θα υποθέτουμε ότι το F δεν ανήκει στην L.



ΣΧΗΜΑ 11.40 Η πρότυπη μορφή της παραβολής $x^2 = 4py$, $p > 0$.

Η εξίσωση της παραβολής έχει την απλούστερη μορφή όταν η εστία και η διευθετούσα βρίσκονται εκατέρωθεν ενός από τους άξονες συντεταγμένων. Παραδείγματος χάριν, έστω ότι η εστία βρίσκεται στο σημείο $F(0, p)$ στον θετικό ημιάξονα y και ότι η διευθετούσα είναι η $y = -p$ (Σχήμα 11.40). Στον συμβολισμό του σχήματος, ένα σημείο $P(x, y)$ ανήκει στην παραβολή αν και μόνο αν $PF = PQ$. Από τον τύπο της απόστασης,

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}.$$

Αν εξισώσουμε αυτές τις εκφράσεις, υψώσουμε στο τετράγωνο και απλοποιήσουμε, παίρνουμε

$$y = \frac{x^2}{4p} \quad \text{ή} \quad x^2 = 4py. \qquad \text{Πρότυπη μορφή} \qquad (1)$$

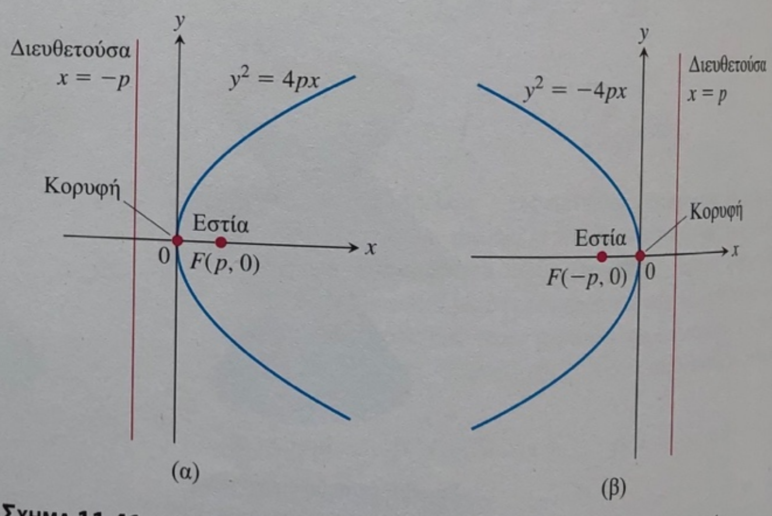
Οι εξισώσεις αυτές αποκαλύπτουν τη συμμετρία της υπερβολής ως προς τον άξονα y. Ο άξονας y καλείται άξονας της παραβολής (συντόμευση για το «άξονας συμμετρίας»).

Το σημείο όπου η παραβολή τέμνει τον άξονά της ονομάζεται **κορυφή**. Η κορυφή της παραβολής $x^2 = 4py$ βρίσκεται στην αρχή (Σχήμα 11.40). Ο θετικός αριθμός p ονομάζεται **εστιακό μήκος** της παραβολής.

Αν η παραβολή στρέφει τα κοίλα κάτω, με την εστία της στο $(0, -p)$ και με διευθετούσα την ευθεία $y = p$, τότε οι Εξισώσεις (1) γίνονται

$$y = -\frac{x^2}{4p} \quad \text{και} \quad x^2 = -4py.$$

Εναλλάσσοντας τις μεταβλητές x και y, παίρνουμε παρόμοιες εκφράσεις για παραβολές που στρέφουν τα κοίλα δεξιά ή αριστερά (Σχήμα 11.41).



ΣΧΗΜΑ 11.41 (α) Η παραβολή $y^2 = 4px$. (β) Η παραβολή $y^2 = -4px$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 10x$.

Λύση Βρίσκουμε την τιμή του p στην πρότυπη εξίσωση $y^2 = 4px$:

$$4p = 10, \quad \text{επομένως} \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Έπειτα βρίσκουμε την εστία και τη διευθετούσα για αυτή την τιμή του p:

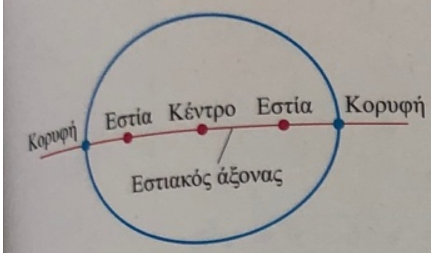
$$\text{Εστία:} \quad (p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\text{Διευθετούσα:} \quad x = -p \quad \text{ή} \quad x = -\frac{5}{2}.$$

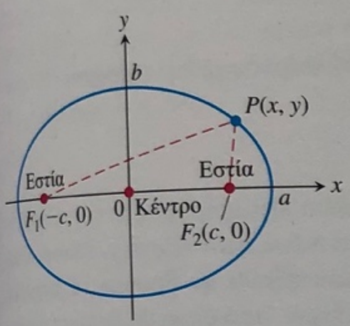
Έλλειψη

ΟΡΙΣΜΟΙ **Έλλειψη** είναι το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου έχουν σταθερό άθροισμα. Τα δύο σταθερά σημεία είναι οι **εστίες** της έλλειψης.

Η ευθεία που διέρχεται από τις εστίες μιας έλλειψης είναι ο **εστιακός άξονας** της έλλειψης. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις εστίες είναι το **κέντρο** της έλλειψης. Τα σημεία όπου ο εστιακός άξονας τέμνει την έλλειψη είναι οι **κορυφές** της έλλειψης (Σχήμα 11.42).



ΣΧΗΜΑ 11.42 Σημεία στον εστιακό άξονα μιας έλλειψης.



ΣΧΗΜΑ 11.43 Η έλλειψη που ορίζεται από την εξίσωση $PF_1 + PF_2 = 2a$ είναι το γράφημα της εξίσωσης $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, όπου $b^2 = a^2 - c^2$.

Αν οι εστίες είναι τα σημεία $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$ (Σχήμα 11.43), και το άθροισμα $PF_1 + PF_2$ συμβολίζεται ως $2a$, τότε οι συντεταγμένες ενός σημείου P της έλλειψης ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Για να απλοποιήσουμε αυτή την εξίσωση, περνάμε το δεύτερο ριζικό στο δεξιό μέλος, υψώνουμε στο τετράγωνο, λύνουμε ως προς το εναπομένον ριζικό, υψώνουμε ξανά στο τετράγωνο και παίρνουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{2}$$

Εφόσον το $PF_1 + PF_2$ είναι μεγαλύτερο από το μήκος F_1F_2 (τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο PF_1F_2), ο αριθμός $2a$ είναι μεγαλύτερος του $2c$. Συνεπώς, $a > c$ και ο παρονομαστής $a^2 - c^2$ στην Εξίσωση (2) είναι θετικός.

Μπορούμε να αντιστρέψουμε τα αλγεβρικά βήματα που οδηγούν στην Εξίσωση (2) για να δείξουμε ότι κάθε σημείο P του οποίου οι συντεταγμένες ικανοποιούν μια εξίσωση αυτής της μορφής με $0 < c < a$, θα ικανοποιεί επίσης και την εξίσωση $PF_1 + PF_2 = 2a$. Επομένως, ένα σημείο ανήκει στην έλλειψη αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την Εξίσωση (2).

Αν συμβολίσουμε με b τη θετική τετραγωνική ρίζα του $a^2 - c^2$,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \tag{3}$$

τότε $a^2 - c^2 = b^2$ και η Εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Η Εξίσωση (4) αποκαλύπτει ότι η έλλειψη αυτή είναι συμμετρική ως προς την αρχή και ως προς τους δύο άξονες συντεταγμένων. Η έλλειψη βρίσκεται εντός του παραλληλογράμμου που φράσσεται από τις ευθείες $x = \pm a$ και $y = \pm b$, ενώ τέμνει τους άξονες στα σημεία $(\pm a, 0)$ και $(0, \pm b)$. Οι εφαπτόμενες σε αυτά τα σημεία είναι κάθετες στους άξονες διότι το

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

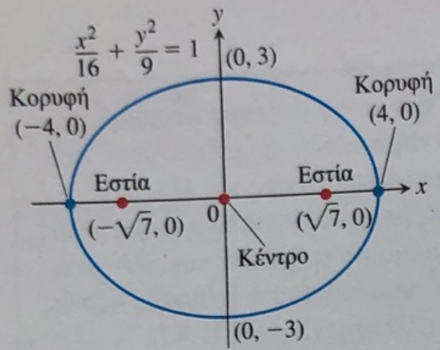
Από την Εξ. (4) με πεπλεγμένη παραγώγιση

μηδενίζεται για $x = 0$ και απειρίζεται για $y = 0$.

Ο **μεγάλος άξονας** της έλλειψης της Εξίσωσης (4) είναι το ευθύγραμμο τμήμα μήκους $2a$ που ενώνει τα σημεία $(\pm a, 0)$. Ο **μικρός άξονας** είναι το ευθύγραμμο τμήμα μήκους $2b$ που ενώνει τα σημεία $(0, \pm b)$. Ο ίδιος ο αριθμός a είναι ο **μεγάλος ημιάξονας**, ενώ ο αριθμός b είναι ο **μικρός ημιάξονας**. Ο αριθμός c, που προκύπτει από την Εξίσωση (3) ως

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

είναι η **απόσταση κέντρου-εστίας** της έλλειψης. Αν $a = b$, η έλλειψη είναι κύκλος.



ΣΧΗΜΑ 11.44 Έλλειψη με οριζόντιο μεγάλο άξονα (Παράδειγμα 2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Η έλλειψη

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{5}$$

(Σχήμα 11.44) έχει

μεγάλο ημιάξονα: $a = \sqrt{16} = 4$,

μικρό ημιάξονα: $b = \sqrt{9} = 3$,

απόσταση κέντρου-εστίας: $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$,

εστίες: $(\pm c, 0) = \left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$,

κορυφές: $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$,

κέντρο: $(0, 0)$.

Αν στην Εξίσωση (5) εναλλάξουμε τα x και y, παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1. \tag{6}$$

Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης αυτής είναι τώρα κατακόρυφος αντί για οριζόντιος, ενώ οι εστίες και οι κορυφές βρίσκονται πάνω στον άξονα y. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη διεύθυνση του μεγάλου άξονα αν βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης με τους άξονες συντεταγμένων, από όπου θα βρούμε ποιος είναι ο άξονας με το μεγαλύτερο μήκος.

Πρότυπη μορφή εξισώσεων για ελλείψεις με κέντρο στην αρχή

Εστίες στον άξονα x: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$

Απόσταση κέντρου-εστίας: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Εστίες: $(\pm c, 0)$

Κορυφές: $(\pm a, 0)$

Εστίες στον άξονα y: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$

Απόσταση κέντρου-εστίας: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Εστίες: $(0, \pm c)$

Κορυφές: $(0, \pm a)$

Σε κάθε περίπτωση, a είναι ο μεγάλος και b ο μικρός ημιάξονας.

Υπερβολή

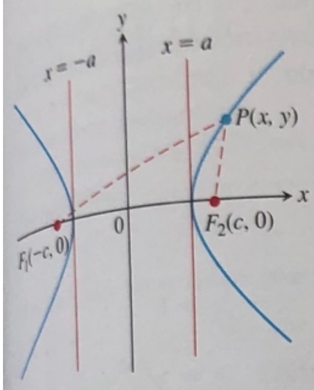
ΟΡΙΣΜΟΙ **Υπερβολή** είναι το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου έχουν σταθερή διαφορά. Τα δύο σταθερά σημεία είναι οι **εστίες** της υπερβολής.

Η ευθεία που διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής είναι ο **εστιακός άξονας**. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις εστίες είναι το **κέντρο** της υπερβολής. Τα σημεία τομής του εστιακού άξονα με την υπερβολή είναι οι **κορυφές** (Σχήμα 11.45).

ΣΧΗΜΑ 11.45 Σημεία πάνω στον εστιακό άξονα μιας υπερβολής.

Αν οι εστίες είναι τα $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$ (Σχήμα 11.46) και η σταθερή διαφορά είναι $2a$, τότε ένα σημείο (x, y) ανήκει στην υπερβολή αν και μόνο αν

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{7}$$



ΣΧΗΜΑ 11.46 Οι υπερβολές έχουν δύο κλάδους. Για σημεία στον δεξιό κλάδο της υπερβολής που φαίνεται εδώ, είναι $PF_1 - PF_2 = 2a$. Για σημεία του αριστερού κλάδου, $PF_2 - PF_1 = 2a$. Τότε θέτουμε $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Για να απλοποιήσουμε αυτή την εξίσωση, περνάμε το δεύτερο ριζικό στο δεξιό μέλος, υψώνουμε στο τετράγωνο, λύνουμε ως προς το εναπομένον ριζικό, υψώνουμε ξανά στο τετράγωνο, οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \qquad (8)$$

Έως εδώ, η εξίσωση μοιάζει με εκείνη της έλλειψης. Αλλά, τώρα, ο παρονομαστής $a^2 - c^2$ είναι αρνητικός διότι το $2a$, που είναι η διαφορά δύο πλευρών του τριγώνου PF_1F_2, είναι μικρότερο του $2c$, της τρίτης πλευράς.

Μπορούμε να αντιστρέψουμε τα αλγεβρικά βήματα που οδηγούν στην Εξίσωση (8) για να δείξουμε ότι κάθε σημείο P του οποίου οι συντεταγμένες ικανοποιούν μια εξίσωση αυτής της μορφής με $0 < a < c$, θα ικανοποιεί επίσης και την Εξίσωση (7). Επομένως, ένα σημείο ανήκει στην υπερβολή αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την Εξίσωση (8).

Αν συμβολίσουμε με b τη θετική τετραγωνική ρίζα του $c^2 - a^2$,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \qquad (9)$$

τότε $a^2 - c^2 = -b^2$ και η Εξίσωση (8) παίρνει την πιο συμπαγή μορφή

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (10)$$

Οι διαφορές μεταξύ της Εξίσωσης (10) και της εξίσωσης της έλλειψης (Εξίσωση 4) είναι το αρνητικό πρόσημο και η νέα σχέση

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad \text{Από Εξ. (9)}$$

Όπως και η έλλειψη, η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς την αρχή και ως προς τους άξονες συντεταγμένων. Τέμνει τον άξονα x στα σημεία $(\pm a, 0)$. Οι εφαπτόμενες σε αυτά τα σημεία είναι κατακόρυφες διότι το

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{Προκύπτει από την Εξ. (10) με πεπλεγμένη παραγώγιση}$$

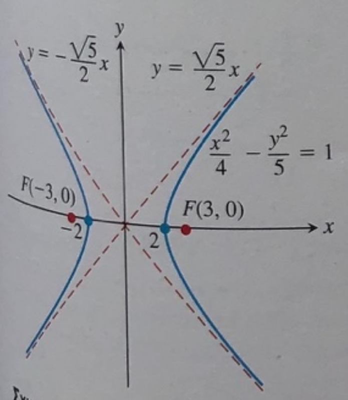
απειρίζεται για $y = 0$. Η υπερβολή δεν έχει τεταγμένες επί την αρχή· στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει καν τμήμα της καμπύλης μεταξύ των ευθειών $x = -a$ και $x = a$.

Οι ευθείες

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

είναι οι δύο **ασύμπτωτες** της υπερβολής που ορίζεται από την Εξίσωση (10). Ο πιο σύντομος τρόπος εύρεσης των εξισώσεων των ασυμπτώτων είναι να αντικαταστήσουμε το 1 στην Εξίσωση (10) με το 0 και να λύσουμε την καινούρια εξίσωση ως προς y:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{υπερβολή}} \rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{0 αντί 1}} \rightarrow \underbrace{y = \pm\frac{b}{a}x}_{\text{ασύμπτωτες}}.$$



ΣΧΗΜΑ 11.47 Η υπερβολή του Παραδείγματος 3 και οι ασύμπτωτές της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Η εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \qquad (11)$$

είναι η Εξίσωση (10) με $a^2 = 4$ και $b^2 = 5$ (Σχήμα 11.47). Έχουμε

Απόσταση κέντρου-εστίας: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$,

εστίες: $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$, Κορυφές: $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$,

κέντρο: $(0, 0)$,

ασύμπτωτες: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 0$ ή $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$. ■

Αν στην Εξίσωση (11) εναλλάξουμε τα x και y, οι εστίες και οι κορυφές της προκύπτουσας υπερβολής θα βρίσκονται πάνω στον άξονα y. Οι ασύμπτωτες βρίσκονται και πάλι όπως πριν, αλλά τώρα οι εξισώσεις τους θα είναι $y = \pm 2x/\sqrt{5}$.

Πρότυπες εξισώσεις για υπερβολές με κέντρο στην αρχή

Εστίες στον άξονα x: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Απόσταση κέντρου-εστίας: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Εστίες: $(\pm c, 0)$

Κορυφές: $(\pm a, 0)$

Ασύμπτωτες: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ ή $y = \pm \dfrac{b}{a}x$

Εστίες στον άξονα y: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Απόσταση κέντρου-εστίας: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Εστίες: $(0, \pm c)$

Κορυφές: $(0, \pm a)$

Ασύμπτωτες: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 0$ ή $y = \pm \dfrac{a}{b}x$

Προσέξτε τη διαφορά στις εξισώσεις των ασυμπτώτων (b/a στην πρώτη, a/b στη δεύτερη).

Οι κωνικές τομές μετατοπίζονται με βάση τους κανόνες που αναφέρονται στην Ενότητα 1.2, αντικαθιστώντας το x με $x + h$ και το y με $y + k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$ αναπαριστά υπερβολή. Βρείτε το κέντρο, τις ασύμπτωτες και τις εστίες της.

Λύση Ανάγουμε την εξίσωση σε πρότυπη μορφή συμπληρώνοντας το τετράγωνο ως προς x και y ως εξής:

$$(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 2y) = 7$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 2y + 1) = 7 + 1 - 4$$

$$\frac{(x + 1)^2}{4} - (y - 1)^2 = 1.$$

Αυτή είναι η πρότυπη Εξίσωση (10) για υπερβολή, με το x να έχει αντικατασταθεί από το $x + 1$ και το y από το $y - 1$. Η υπερβολή είναι μετατοπισμένη κατά μία μονάδα αριστερά και κατά μία μονάδα επάνω, ενώ για το κέντρο της ισχύουν οι $x + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$, ή $x = -1$ και $y = 1$. Επιπλέον,

$$a^2 = 4, \qquad b^2 = 1, \qquad c^2 = a^2 + b^2 = 5,$$

έτσι οι ασύμπτωτες είναι οι δύο ευθείες

$$\frac{x + 1}{2} - (y - 1) = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{x + 1}{2} + (y - 1) = 0,$$

ή

$$y - 1 = \pm \frac{1}{2}(x + 1).$$

Οι μετατοπισμένες εστίες έχουν συντεταγμένες $\left(-1 \pm \sqrt{5}, 1\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11.6

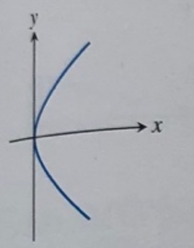
Αναγνώριση γραφημάτων

Αντιστοιχίστε τις παραβολές των Ασκήσεων 1-4 με τις ακόλουθες εξισώσεις:

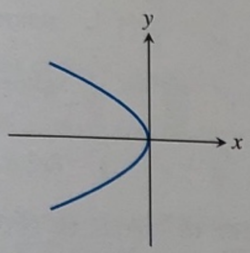
$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x.$$

Έπειτα βρείτε την εστία και τη διευθετούσα κάθε παραβολής.

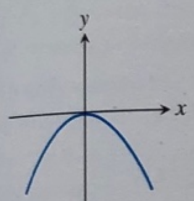
1.



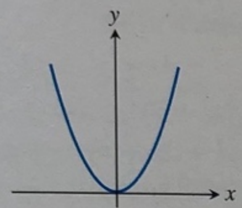
2.



3.



4.



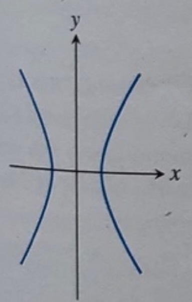
Αντιστοιχίστε κάθε κωνική τομή των Ασκήσεων 5-8 με μια από τις εξισώσεις:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

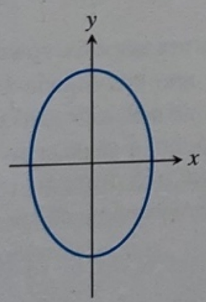
$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Έπειτα βρείτε τις εστίες και τις κορυφές κάθε κωνικής τιμής. Αν η κωνική τομή είναι υπερβολή, βρείτε και τις ασύμπτωτές της.

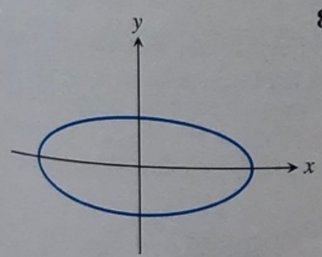
5.



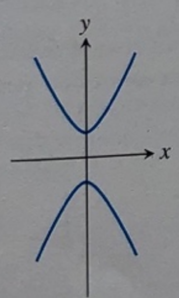
6.



7.



8.



Παραβολές

Στις Ασκήσεις 9-16 δίνονται εξισώσεις παραβολών. Βρείτε την εστία και τη διευθετούσα κάθε παραβολής. Έπειτα σχεδιάστε την παραβολή. Συμπεριλάβετε στο σχέδιό σας την εστία και τη διευθετούσα.

9. $y^2 = 12x$ **10.** $x^2 = 6y$ **11.** $x^2 = -8y$

12. $y^2 = -2x$ **13.** $y = 4x^2$ **14.** $y = -8x^2$

15. $x = -3y^2$ **16.** $x = 2y^2$

Ελλείψεις

Στις Ασκήσεις 17-24 δίνονται εξισώσεις ελλείψεων. Γράψτε κάθε εξίσωση σε πρότυπη μορφή. Έπειτα σχεδιάστε την έλλειψη. Συμπεριλάβετε στο σχέδιό σας τις εστίες.

17. $16x^2 + 25y^2 = 400$ **18.** $7x^2 + 16y^2 = 112$

19. $2x^2 + y^2 = 2$ **20.** $2x^2 + y^2 = 4$

21. $3x^2 + 2y^2 = 6$ **22.** $9x^2 + 10y^2 = 90$

23. $6x^2 + 9y^2 = 54$ **24.** $169x^2 + 25y^2 = 4225$

Στις Ασκήσεις 25 και 26 δίνονται πληροφορίες για τις εστίες και τις κορυφές ελλείψεων με κέντρο στην αρχή του επιπέδου xy. Βρείτε, σε κάθε περίπτωση, την εξίσωση της έλλειψης σε πρότυπη μορφή.

25. Εστίες: $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$ Κορυφές: $(\pm 2, 0)$

26. Εστίες: $(0, \pm 4)$ Κορυφές: $(0, \pm 5)$

Υπερβολές

Στις Ασκήσεις 27-34 δίνονται εξισώσεις υπερβολών. Γράψτε κάθε εξίσωση σε πρότυπη μορφή και βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής. Έπειτα σχεδιάστε πρόχειρα την υπερβολή. Συμπεριλάβετε στο σχέδιό σας τις ασύμπτωτες και τις εστίες.

27. $x^2 - y^2 = 1$ **28.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

29. $y^2 - x^2 = 8$ **30.** $y^2 - x^2 = 4$

31. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **32.** $y^2 - 3x^2 = 3$

33. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **34.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

Στις Ασκήσεις 35-38 δίνονται πληροφορίες για τις εστίες, τις κορυφές και τις ασύμπτωτες υπερβολών με κέντρο στην αρχή του επιπέδου xy. Βρείτε, σε κάθε περίπτωση, την εξίσωση της υπερβολής σε πρότυπη μορφή.

35. Εστίες: $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$
Ασύμπτωτες: $y = \pm x$

36. Εστίες: $(\pm 2, 0)$
Ασύμπτωτες: $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$

37. Κορυφές: $(\pm 3, 0)$
Ασύμπτωτες: $y = \pm \frac{4}{3}x$

38. Κορυφές: $(0, \pm 2)$
Ασύμπτωτες: $y = \pm \frac{1}{2}x$

Μετατόπιση κωνικών τομών

Πριν λύσετε τις Ασκήσεις 39-56, ίσως χρειαστεί να ξαναδείτε την Ενότητα 1.2.

39. Η παραβολή $y^2 = 8x$ μετατοπίζεται κατά 2 μονάδες προς τα κάτω και κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά, οπότε παράγεται η παραβολή $(y + 2)^2 = 8(x - 1)$.

α. Βρείτε την κορυφή, την εστία και τη διευθετούσα της νέας παραβολής.

β. Σχεδιάστε τη νέα παραβολή, την κορυφή, την εστία και τη διευθετούσα της.

40. Η παραβολή $x^2 = -4y$ μετατοπίζεται κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατά 3 μονάδες προς τα πάνω, οπότε παράγεται η παραβολή $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$.

α. Βρείτε την κορυφή, την εστία και τη διευθετούσα της νέας παραβολής.

β. Σχεδιάστε τη νέα παραβολή, την κορυφή, την εστία και τη διευθετούσα της.

41. Η έλλειψη $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ μετατοπίζεται κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 3 μονάδες προς τα πάνω, οπότε παράγεται η έλλειψη

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

α. Βρείτε τις εστίες, τις κορυφές και το κέντρο της νέας έλλειψης.

β. Σχεδιάστε τη νέα έλλειψη, τις εστίες, τις κορυφές και το κέντρο της.

42. Η έλλειψη $(x^2/9) + (y^2/25) = 1$ μετατοπίζεται κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, οπότε παράγεται η έλλειψη

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

α. Βρείτε τις εστίες, τις κορυφές και το κέντρο της νέας έλλειψης.

β. Σχεδιάστε τη νέα έλλειψη, τις εστίες, τις κορυφές και το κέντρο της.

43. Η υπερβολή $(x^2/16) - (y^2/9) = 1$ μετατοπίζεται κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, οπότε παράγεται η υπερβολή

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

α. Βρείτε το κέντρο, τις εστίες, τις κορυφές και τις ασύμπτωτες της νέας υπερβολής.

β. Σχεδιάστε τη νέα υπερβολή, το κέντρο, τις εστίες, τις κορυφές και τις ασύμπτωτές της.

44. Η υπερβολή $(y^2/4) - (x^2/5) = 1$ μετατοπίζεται κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, οπότε παράγεται η υπερβολή

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1.$$

α. Βρείτε το κέντρο, τις εστίες, τις κορυφές και τις ασύμπτωτες της νέας υπερβολής.

β. Σχεδιάστε τη νέα υπερβολή, το κέντρο, τις εστίες, τις κορυφές και τις ασύμπτωτές της.

Στις Ασκήσεις 45-48 δίνονται εξισώσεις παραβολών και αναφέρεται το κατά πόσες μονάδες έχει μετατοπιστεί ή κάθε παραβολή προς κάθε κατεύθυνση. Βρείτε την εξίσωση της νέας παραβολής, καθώς και τη νέα κορυφή, εστία και διευθετούσα.

45. $y^2 = 4x$, αριστερά 2, κάτω 3

46. $y^2 = -12x$, δεξιά 4, πάνω 3

47. $x^2 = 8y$, δεξιά 1, κάτω 7

48. $x^2 = 6y$, αριστερά 3, κάτω 2

Στις Ασκήσεις 49-52 δίνονται εξισώσεις ελλείψεων και αναφέρεται το κατά πόσες μονάδες έχει μετατοπιστεί η κάθε έλλειψη προς κάθε κατεύθυνση. Βρείτε την εξίσωση της νέας έλλειψης, τις νέες εστίες και κορυφές και το νέο κέντρο.

49. $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, αριστερά 2, κάτω 1

50. $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$, δεξιά 3, πάνω 4

51. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$, δεξιά 2, πάνω 3

52. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, αριστερά 4, κάτω 5

Στις Ασκήσεις 53-56 δίνονται εξισώσεις υπερβολών και αναφέρεται το κατά πόσες μονάδες έχει μετατοπιστεί η κάθε υπερβολή προς κάθε κατεύθυνση. Βρείτε την εξίσωση της νέας υπερβολής, το νέο κέντρο, και τις νέες εστίες, κορυφές και ασύμπτωτες.

53. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$, δεξιά 2, πάνω 2

54. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, αριστερά 2, πάνω 1

55. $y^2 - x^2 = 1$, αριστερά 1, κάτω 1

56. $\dfrac{y^2}{3} - x^2 = 1$, δεξιά 1, πάνω 3

Βρείτε το κέντρο, τις εστίες, τις κορυφές, τις ασύμπτωτες, και την ακτίνα, ανάλογα με την περίπτωση, των κωνικών τομών των Ασκήσεων 57-68.

57. $x^2 + 4x + y^2 = 12$

58. $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$

59. $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

60. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

61. $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$

62. $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

63. $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

64. $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

65. $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

66. $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

67. $2x^2 - y^2 + 6y = 3$

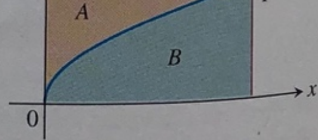
68. $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

Θεωρία και παραδείγματα

69. Αν από ένα σημείο P της παραβολής $y^2 = kx, k > 0$, φέρουμε ευθείες παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων, η παραβολή χωρίζει το παραλληλόγραμμο χωρίο που φράσσεται από αυτές τις ευθείες και τους δύο άξονες σε δύο μικρότερα χωρία, A και B.

α. Δείξτε ότι, αν τα δύο μικρότερα χωρία περιστραφούν ως προς τον άξονα y, παράγουν στερεά με αναλογία όγκων 4:1.

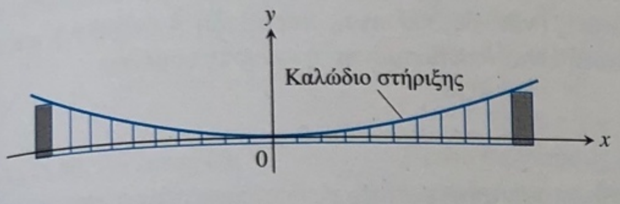
β. Ποια είναι η αναλογία όγκων των στερεών που παράγονται αν τα δύο χωρία περιστραφούν ως προς τον άξονα x;



70. Τα καλώδια στήριξης μιας κρεμαστής γέφυρας σχηματίζουν παραβολές Το καλώδιο στήριξης της κρεμαστής γέφυρας που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα σηκώνει ομοιόμορφο φορτίο w (σε μονάδες βάρους ανά μονάδα οριζόντιας απόστασης). Μπορεί να δειχτεί ότι αν H είναι η οριζόντια τάση του καλωδίου στην αρχή, τότε η καμπύλη του καλωδίου ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}x.$$

Δείξτε ότι το καλώδιο σχηματίζει παραβολή λύνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση με την αρχική συνθήκη ότι $y = 0$ για $x = 0$.



71. **Πλάτος παραβολής στην εστία** Δείξτε ότι ο αριθμός $4p$ είναι το *πλάτος* της παραβολής $x^2 = 4py\ (p > 0)$ στην εστία δείχνοντας ότι η ευθεία $y = p$ τέμνει την παραβολή σε σημεία που απέχουν $4p$ μονάδες.

72. **Οι ασύμπτωτες της $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$** Δείξτε ότι η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της ευθείας $y = (b/a)x$ και του άνω μισού του δεξιού κλάδου $y = (b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$ της υπερβολής $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ τείνει στο 0 δείχνοντας ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = 0.$$

Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν για τα υπόλοιπα τμήματα της υπερβολής και τις ευθείες $y = \pm(b/a)x$.

73. **Εμβαδόν** Βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να εγγραφεί στην έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$, με τις πλευρές του παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων. Ποιο είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου;

74. **Όγκος** Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη $9x^2 + 4y^2 = 36$ ως προς **(α)** τον άξονα x, **(β)** τον άξονα y.

75. **Όγκος** Το «τριγωνικό» χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο που φράσσεται από τον άξονα x, την ευθεία $x = 4$, και την υπερβολή $9x^2 - 4y^2 = 36$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x και παράγει ένα στερεό. Βρείτε τον όγκο του στερεού.

76. **Εφαπτόμενες** Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες στην καμπύλη $y^2 = 4px$ από τυχόν σημείο της ευθείας $x = -p$ είναι μεταξύ τους κάθετες.

77. **Εφαπτόμενες** Βρείτε εξισώσεις για τις εφαπτόμενες στον κύκλο $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ στα σημεία όπου ο κύκλος τέμνει τους άξονες συντεταγμένων.

78. **Όγκος** Το χωρίο που φράσσεται στα αριστερά από τον άξονα y, στα δεξιά από την υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$, και πάνω και κάτω από τις ευθείες $y = \pm 3$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα y παράγοντας ένα στερεό. Βρείτε τον όγκο του στερεού.

79. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές του χωρίου που φράσσεται κάτω από τον άξονα x και πάνω από την έλλειψη $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$.

80. **Εμβαδόν επιφάνειας** Η καμπύλη $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$, που είναι τμήμα του άνω κλάδου της υπερβολής $y^2 - x^2 = 1$, περιστρέφεται ως προς τον άξονα x και παράγει μια επιφάνεια. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας.

81. **Η ανακλαστική ιδιότητα των παραβολών** Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα τυπικό σημείο $P(x_0, y_0)$ της παραβολής $y^2 = 4px$. Η ευθεία L είναι εφαπτόμενη της παραβολής στο P. Η εστία της παραβολής βρίσκεται στο σημείο $F(p, 0)$. Η ακτίνα L' που εκτείνεται από το P προς τα δεξιά είναι παράλληλη στον άξονα x. Αποδεικνύεται ότι μια φωτεινή ακτίνα που προσπίπτει στο P προερχόμενη από το F θα ανακλαστεί κατά μήκος της L' αρκεί το β να ισούται με το α. Αποδείξτε αυτή την ισότητα ακολουθώντας τα εξής βήματα.

α. Δείξτε ότι $\tan\beta = 2p/y_0$.

β. Δείξτε ότι $\tan\phi = y_0/(x_0 - p)$.

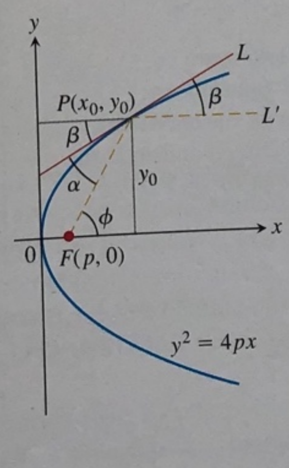
γ. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα

$$\tan\alpha = \frac{\tan\phi - \tan\beta}{1 + \tan\phi\tan\beta}$$

για να δείξετε ότι $\tan\alpha = 2p/y_0$.

Εφόσον οι α και β είναι και οι δύο οξείες, από την ισότητα $\tan\beta = \tan\alpha$ συνεπάγεται ότι $\beta = \alpha$.

Η ανακλαστική ιδιότητα των παραβολών χρησιμοποιείται σε εφαρμογές όπως οι προβολείς των αυτοκινήτων, τα ραδιοτηλεσκόπια και τα δορυφορικά τηλεοπτικά πιάτα.



11.7 Κωνικές τομές σε πολικές συντεταγμένες

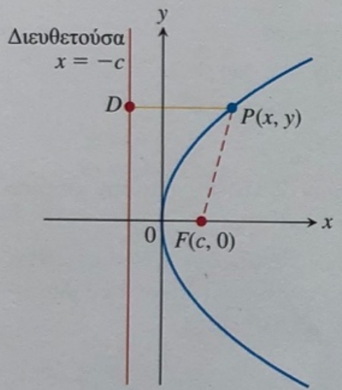
Οι πολικές συντεταγμένες είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην αστρονομία και την αστροναυτική διότι οι δορυφόροι, οι πλανήτες και οι κομήτες κινούνται όλοι κατά προσέγγιση πάνω σε ελλείψεις, παραβολές και υπερβολές που μπορούν να περιγραφούν με μία μόνο, σχετικά απλή, εξίσωση πολικών συντεταγμένων. Θα αναπτύξουμε αυτή την εξίσωση αφού πρώτα εισαγάγουμε την έννοια της *εκκεντρότητας* μιας κωνικής τομής. Η εκκεντρότητα αποκαλύπτει τον τύπο της κωνικής τομής (κύκλος, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή) και τον βαθμό στον οποίον αυτή είναι «πεπιεσμένη» ή «πεπλατυσμένη».

Εκκεντρότητα

Παρόλο που η απόσταση κέντρου-εστίας, c, δεν εμφανίζεται στην πρότυπη καρτεσιανή εξίσωση της έλλειψης,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a > b),$$

μπορούμε να βρούμε το c από την εξίσωση $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Κρατώντας σταθερό το a και μεταβάλλοντας το c στο διάστημα $0 \le c \le a$, βρίσκουμε ελλείψεις με διάφορες μορφές. Είναι κύκλοι αν $c = 0$ (οπότε $a = b$), ενώ διαπλατύνονται και γίνονται πιο επιμήκεις καθώς το c αυξάνει. Αν $c = a$, οι εστίες συμπίπτουν με τις κορυφές και η έλλειψη εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα. Οδηγούμαστε έτσι στο να θεωρήσουμε τον λόγο $e = c/a$. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο λόγο και για υπερβολές, με τη διαφορά ότι το c ισούται με $\sqrt{a^2 + b^2}$ αντί για $\sqrt{a^2 - b^2}$. Ο λόγος αυτός ονομάζεται *εκκεντρότητα* της έλλειψης ή της υπερβολής.



ΣΧΗΜΑ 11.48 Η απόσταση της εστίας F από τυχόν σημείο P της παραβολής ισούται με την απόσταση του P από το πλησιέστερο σημείο D της διευθετούσας, δηλαδή $PF = PD$.

> **ΟΡΙΣΜΟΣ**
>
> Η **εκκεντρότητα** της έλλειψης $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ $(a > b)$ ισούται με
>
> $$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$
>
> Η **εκκεντρότητα** της υπερβολής $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ ισούται με
>
> $$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$
>
> Η **εκκεντρότητα** μιας παραβολής ισούται με $e = 1$.

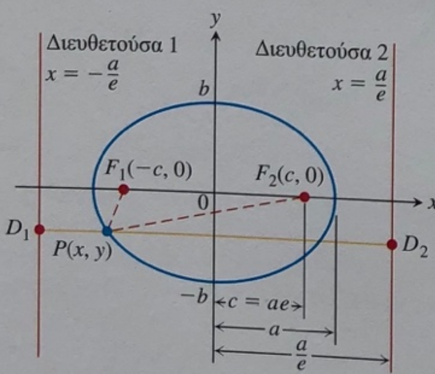
Ενώ η παραβολή έχει μία εστία και μία διευθετούσα, κάθε **έλλειψη** έχει δύο εστίες και δύο **διευθετούσες**. Πρόκειται για τις ευθείες που τέμνουν κάθετα τον μεγάλο άξονα σε αποστάσεις $\pm a/e$ από το κέντρο. Από το Σχήμα 11.48 βλέπουμε ότι για τυχόν σημείο P της παραβολής, ισχύει

$$PF = 1 \cdot PD, \tag{1}$$

όπου F η εστία και D το πλησιέστερο στο P σημείο της διευθετούσας. Για έλλειψη, μπορεί να δειχτεί ότι οι εξισώσεις που αντικαθιστούν την Εξίσωση (1) είναι οι

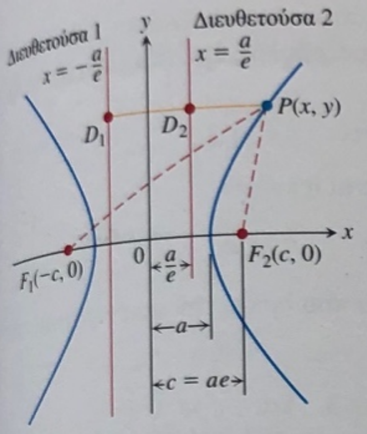
$$PF_1 = e \cdot PD_1, \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{2}$$

Εδώ, e είναι η εκκεντρότητα, P τυχόν σημείο της έλλειψης, F_1 και F_2 οι εστίες, και D_1 και D_2 αντίστοιχα το πλησιέστερο στο P σημείο κάθε διευθετούσας (Σχήμα 11.49).



ΣΧΗΜΑ 11.49 Οι εστίες και οι διευθετούσες της έλλειψης $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Η διευθετούσα 1 αντιστοιχεί στην εστία F_1 και η διευθετούσα 2 στην εστία F_2.

Και στις δύο Εξισώσεις (2), η διευθετούσα πρέπει να είναι αντίστοιχη της εστίας· δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε την απόσταση του P από την εστία F_1,



ΣΧΗΜΑ 11.50 Οι εστίες και οι διευθετούσες της υπερβολής $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. Ανεξάρτητα του πού βρίσκεται το P πάνω στην υπερβολή, ισχύουν οι σχέσεις $PF_1 = e \cdot PD_1$ και $PF_2 = e \cdot PD_2$.

πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και την απόσταση του P από τη διευθετούσα που βρίσκεται στην ίδια πλευρά της έλλειψης με την F_1. Η διευθετούσα $x = -a/e$ αντιστοιχεί στην εστία $F_1(-c, 0)$, ενώ η διευθετούσα $x = a/e$ αντιστοιχεί στην εστία $F_2(c, 0)$.

Όπως και με την έλλειψη, μπορεί να δειχτεί ότι οι ευθείες $x = \pm a/e$ δρουν ως **διευθετούσες** της **υπερβολής** και ότι

$$PF_1 = e \cdot PD_1 \qquad \text{και} \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{3}$$

Εδώ, το P είναι τυχόν σημείο της υπερβολής, F_1 και F_2 είναι οι εστίες, και D_1 και D_2 αντίστοιχα είναι το πλησιέστερο στο P σημείο κάθε διευθετούσας (Σχήμα 11.50).

Τόσο στην έλλειψη όσο και στην υπερβολή, η εκκεντρότητα είναι ο λόγος της απόστασης μεταξύ των εστιών προς την απόσταση μεταξύ των κορυφών (διότι $c/a = 2c/2a$).

$$\boxed{\text{Εκκεντρότητα} = \frac{\text{απόσταση μεταξύ εστιών}}{\text{απόσταση μεταξύ κορυφών}}}$$

Σε μια έλλειψη, οι εστίες απέχουν λιγότερο από όσο οι κορυφές και ο λόγος είναι μικρότερος της μονάδας. Σε μια υπερβολή, οι εστίες απέχουν περισσότερο από όσο οι κορυφές και ο λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας.

Η εξίσωση «εστίας-διευθετούσας» της κωνικής, $PF = e \cdot PD$, ενοποιεί την παραβολή, την έλλειψη και την υπερβολή με τον εξής τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι η απόσταση PF ενός σημείου P από ένα σταθερό σημείο F (την εστία) είναι σταθερό πολλαπλάσιο της απόστασής του από μια σταθερή ευθεία (τη διευθετούσα). Δηλαδή, έστω

$$\boxed{PF = e \cdot PD,} \tag{4}$$

όπου e είναι η σταθερά αναλογίας. Τότε, η τροχιά που διαγράφει το P είναι

(α) *παραβολή* αν $e = 1$,

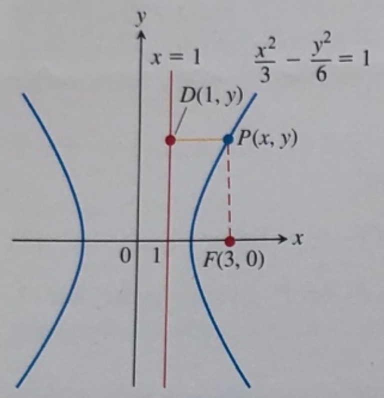
(β) *έλλειψη* εκκεντρότητας e αν $e < 1$, και

(γ) *υπερβολή* εκκεντρότητας e αν $e > 1$.

Καθώς το e αυξάνει, οι ελλείψεις ($e \to 1^-$) γίνονται πιο επιμήκεις, ενώ οι υπερβολές ($e \to \infty$) διαπλατύνονται προς δύο ευθείες παράλληλες στη διευθετούσα. Στην Εξίσωση (4) δεν υπάρχουν συντεταγμένες, και όταν προσπαθούμε να τη γράψουμε σε μορφή με καρτεσιανές συντεταγμένες, οι μορφές διαφέρουν ανάλογα με την τιμή του e. Ωστόσο, όπως θα δούμε σύντομα, σε πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση $PF = e \cdot PD$ μεταφράζεται σε μία εξίσωση, ανεξάρτητα από την τιμή του e.

Δεδομένης της εστίας και της αντίστοιχης διευθετούσας μιας υπερβολής με κέντρο στην αρχή και με εστίες πάνω στον άξονα x, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις διαστάσεις που φαίνονται στο Σχήμα 11.50 για να βρούμε το e. Γνωρίζοντας το e, μπορούμε να συναγάγουμε μια καρτεσιανή εξίσωση για την υπερβολή από την εξίσωση $PF = e \cdot PD$, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα. Μπορούμε να βρούμε εξισώσεις για ελλείψεις με κέντρο στην αρχή και εστίες πάνω στον άξονα x με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τις διαστάσεις που φαίνονται στο Σχήμα 11.49.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Βρείτε μια καρτεσιανή εξίσωση για την υπερβολή που έχει κέντρο στην αρχή, μια εστία στο $(3, 0)$ και την ευθεία $x = 1$ ως αντίστοιχη διευθετούσα.



ΣΧΗΜΑ 11.51 Η υπερβολή και η διευθετούσα του Παραδείγματος 1.

Λύση Χρησιμοποιούμε πρώτα τις διαστάσεις που φαίνονται στο Σχήμα 11.50 για να βρούμε την εκκεντρότητα της υπερβολής. Η εστία είναι (δείτε το Σχήμα 11.51)

$$(c, 0) = (3, 0), \qquad \text{οπότε} \qquad c = 3.$$

Ξανά από το Σχήμα 11.50, η διευθετούσα είναι η ευθεία

$$x = \frac{a}{e} = 1, \qquad \text{οπότε} \qquad a = e.$$

Όταν συνδυαστούν με την εξίσωση $e = c/a$ που ορίζει την εκκεντρότητα, τα αποτελέσματα αυτά δίνουν

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}, \qquad \text{οπότε} \qquad e^2 = 3 \quad \text{και} \quad e = \sqrt{3}.$$

Γνωρίζοντας το e, μπορούμε τώρα να βρούμε την εξίσωση που θέλουμε από την εξίσωση $PF = e \cdot PD$. Στις συντεταγμένες του Σχήματος 11.51, έχουμε

$$\begin{aligned}
PF &= e \cdot PD && \text{Εξ. (4)}\\
\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{3}\,|x-1| && e = \sqrt{3}\\
x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 3(x^2 - 2x + 1) && \text{Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο}\\
2x^2 - y^2 &= 6 && \text{Αναγωγή όμοιων όρων}\\
\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1.
\end{aligned}$$

Πολικές εξισώσεις

Για να βρούμε μια πολική εξίσωση για μια έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή, τοποθετούμε τη μια εστία στην αρχή και την αντίστοιχη διευθετούσα στα δεξιά της αρχής κατά μήκος της κατακόρυφης ευθείας $x = k$ (Σχήμα 11.52). Σε πολικές συντεταγμένες, αυτό δίνει

$$PF = r$$

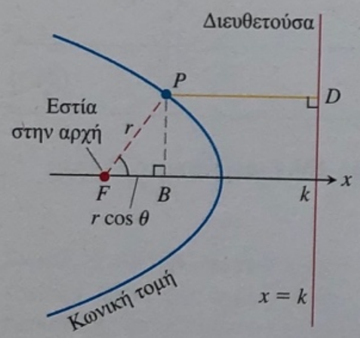
και

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta.$$

Η εξίσωση εστίας-διευθετούσας της κωνικής, $PF = e \cdot PD$, γίνεται τότε

$$r = e(k - r\cos\theta),$$

η οποία όταν επιλυθεί ως προς r δίνει την ακόλουθη έκφραση.



ΣΧΗΜΑ 11.52 Αν μια κωνική τομή τοποθετηθεί με την εστία της στην αρχή και μια διευθετούσα της κάθετη στην αρχική ακτίνα και δεξιά της αρχής, μπορούμε να βρούμε την πολική της εξίσωση από την εξίσωση εστίας-διευθετούσας της κωνικής.

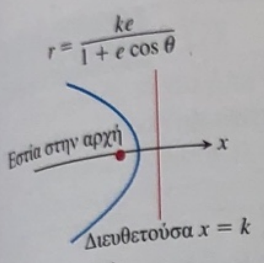
Πολική εξίσωση για κωνική τομή με εκκεντρότητα e

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}, \tag{5}$$

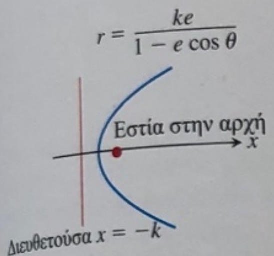
όπου $x = k > 0$ η κατακόρυφη διευθετούσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ακολουθούν οι πολικές εξισώσεις για τρεις κωνικές τομές. Οι τιμές της εκκεντρότητας που καθορίζουν το είδος της κωνικής είναι ίδιες και για πολικές και για καρτεσιανές συντεταγμένες.

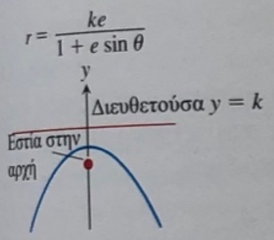
$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{2}: && \text{έλλειψη} && r = \frac{k}{2 + \cos\theta}\\
e &= 1: && \text{παραβολή} && r = \frac{k}{1 + \cos\theta}\\
e &= 2: && \text{υπερβολή} && r = \frac{2k}{1 + 2\cos\theta}
\end{aligned}$$



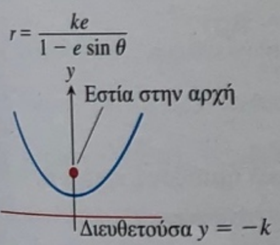
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχημα 11.53 Εξισώσεις για κωνικές τομές με εκκεντρότητα $e > 0$ αλλά με διαφορετικές θέσεις της διευθετούσας. Εδώ φαίνεται μια παραβολή, οπότε $e = 1$.

Υπάρχουν παραλλαγές της Εξίσωσης (5), ανάλογα με τη θέση της διευθετούσας. Αν η διευθετούσα είναι η ευθεία $x = -k$ αριστερά της αρχής (η αρχή παραμένει εστία), αντικαθιστούμε την Εξίσωση (5) με την

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}.$$

Στον παρονομαστή εμφανίζεται τώρα το πρόσημο $(-)$ αντί του $(+)$. Αν η διευθετούσα είναι μια από τις ευθείες $y = k$ ή $y = -k$, στις εξισώσεις εμφανίζονται ημίτονα αντί για συνημίτονα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.53.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Βρείτε μια εξίσωση για την υπερβολή με εκκεντρότητα $3/2$ και διευθετούσα $x = 2$.

Λύση Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση (5) με $k = 2$ και $e = 3/2$:

$$r = \frac{2(3/2)}{1 + (3/2)\cos\theta} \quad \text{ή} \quad r = \frac{6}{2 + 3\cos\theta}.$$ ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Βρείτε τη διευθετούσα της παραβολής

$$r = \frac{25}{10 + 10\cos\theta}.$$

Λύση Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το 10 για να φέρουμε την εξίσωση σε πρότυπη πολική μορφή:

$$r = \frac{5/2}{1 + \cos\theta}.$$

Αυτή είναι η εξίσωση

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

με $k = 5/2$ και $e = 1$. Η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = 5/2$. ■

Από το διάγραμμα της έλλειψης του Σχήματος 11.54, βλέπουμε ότι το k σχετίζεται με την εκκεντρότητα e και τον μεγάλο ημιάξονα a μέσω της εξίσωσης

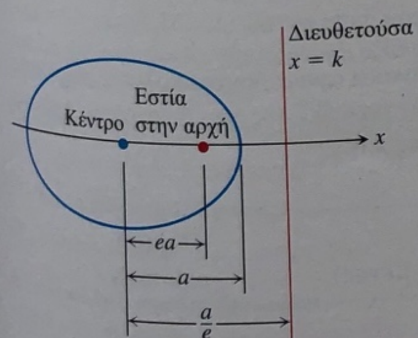
$$k = \frac{a}{e} - ea.$$

Από αυτό, βλέπουμε ότι $ke = a(1 - e^2)$. Αντικαθιστώντας το ke στην Εξίσωση (5) με $a(1 - e^2)$ παίρνουμε την πρότυπη πολική εξίσωση για έλλειψη.

Πολική εξίσωση έλλειψης με εκκεντρότητα e και μεγάλο ημιάξονα a

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \qquad (6)$$

Προσέξτε ότι για $e = 0$, η Εξίσωση (6) παίρνει τη μορφή $r = a$, η οποία αναπαριστά κύκλο.

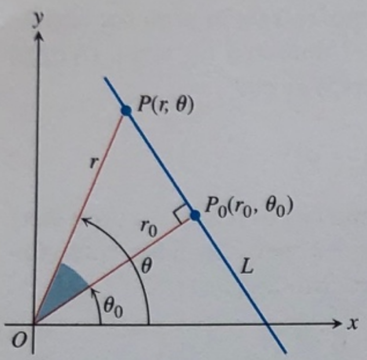


Σχημα 11.54 Σε μια έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα a, η απόσταση εστίας-διευθετούσας είναι $k = (a/e) - ea$, οπότε $ke = a(1 - e^2)$.

Ευθείες

Έστω ότι η κάθετος από την αρχή προς την ευθεία L τέμνει την L στο σημείο $P_0(r_0, \theta_0)$, με $r_0 \geq 0$ (Σχήμα 11.55). Τότε, αν $P(r, \theta)$ τυχόν σημείο επί της L, τα σημεία P, P_0, και O είναι οι κορυφές ενός ορθογώνιου τριγώνου, από το οποίο μπορούμε να συναγάγουμε τη σχέση

$$r_0 = r\cos(\theta - \theta_0).$$



ΣΧΗΜΑ 11.55 Μπορούμε να βρούμε μια πολική εξίσωση για την ευθεία L γράφοντας τη σχέση $r_0 = r\cos(\theta - \theta_0)$ από το ορθογώνιο τρίγωνο OP_0P.

Πρότυπη πολική εξίσωση για ευθείες

Αν το σημείο $P_0(r_0, \theta_0)$ είναι το ίχνος της καθέτου από την αρχή προς την ευθεία L, και $r_0 \geq 0$, τότε μια εξίσωση για την L είναι η

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0. \qquad (7)$$

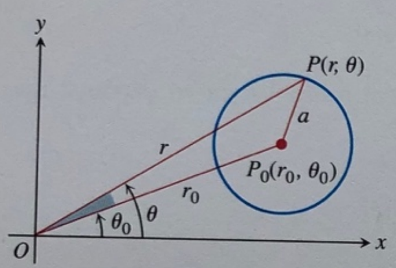
Παραδείγματος χάριν, για $\theta_0 = \pi/3$ και $r_0 = 2$, βρίσκουμε ότι

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta = 2, \qquad \text{ή} \qquad x + \sqrt{3}y = 4.$$

Κύκλοι



ΣΧΗΜΑ 11.56 Μπορούμε να πάρουμε μια πολική εξίσωση για τον κύκλο αυτόν, εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OP_0P.

Για να βρούμε μια πολική εξίσωση για τον κύκλο ακτίνας a με κέντρο στο $P_0(r_0, \theta_0)$, εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OP_0P, όπου $P(r, \theta)$ τυχόν σημείο του κύκλου (Σχήμα 11.56). Αυτό δίνει

$$a^2 = r_0{}^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0).$$

Αν ο κύκλος διέρχεται από την αρχή, τότε $r_0 = a$ και η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται στην

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$
$$r^2 = 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$
$$r = 2a\cos(\theta - \theta_0).$$

Αν το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στον θετικό ημιάξονα x, τότε $\theta_0 = 0$ οπότε παίρνουμε την ακόμα πιο απλή εξίσωση

$$r = 2a\cos\theta. \qquad (8)$$

Αν το κέντρο βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα y, τότε έχουμε $\theta = \pi/2$, $\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$, και η εξίσωση $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$ γίνεται

$$r = 2a\sin\theta. \qquad (9)$$

Εξισώσεις για κύκλους που διέρχονται από την αρχή με κέντρο στους αρνητικούς ημιάξονες x και y μπορούν να προκύψουν αν στις παραπάνω εξισώσεις αντικαταστήσουμε το r με $-r$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται πολικές εξισώσεις που δίνονται από τις Εξισώσεις (8) και (9) για κύκλους που διέρχονται από την αρχή και έχουν κέντρα πάνω στους άξονες x ή y.

Ακτίνα	Κέντρο (πολικές συντεταγμένες)	Πολική εξίσωση
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \pi/2)$	$r = 4\sin\theta$
$1/2$	$(-1/2, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \pi/2)$	$r = -2\sin\theta$

■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11.7

Ελλείψεις και εκκεντρότητα

Στις Ασκήσεις 1-8, βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης. Έπειτα βρείτε και σχεδιάστε τις εστίες και τις διευθετούσες τις έλλειψης.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. $7x^2 + 16y^2 = 112$
3. $2x^2 + y^2 = 2$
4. $2x^2 + y^2 = 4$
5. $3x^2 + 2y^2 = 6$
6. $9x^2 + 10y^2 = 90$
7. $6x^2 + 9y^2 = 54$
8. $169x^2 + 25y^2 = 4225$

Στις Ασκήσεις 9-12 δίνονται οι εστίες ή οι κορυφές και οι εκκεντρότητες ελλείψεων με κέντρο στην αρχή στο επίπεδο xy. Σε κάθε περίπτωση, βρείτε την πρότυπη εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

9. Εστίες: $(0, \pm 3)$, εκκεντρότητα: 0,5
10. Εστίες: $(\pm 8, 0)$, εκκεντρότητα: 0,2
11. Κορυφές: $(0, \pm 70)$, εκκεντρότητα: 0,1
12. Κορυφές: $(\pm 10, 0)$, εκκεντρότητα: 0,24

Στις Ασκήσεις 13-16 δίνονται οι εστίες και οι αντίστοιχες διευθετούσες ελλείψεων με κέντρο στην αρχή στο επίπεδο xy. Σε κάθε περίπτωση, χρησιμοποιήστε τις διαστάσεις από το Σχήμα 11.49 για να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης. Έπειτα βρείτε την πρότυπη εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

13. Εστία: $(\sqrt{5}, 0)$, διευθετούσα: $x = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$
14. Εστία: $(4, 0)$, διευθετούσα: $x = \dfrac{16}{3}$
15. Εστία: $(-4, 0)$, διευθετούσα: $x = -16$
16. Εστία: $(-\sqrt{2}, 0)$, διευθετούσα: $x = -2\sqrt{2}$

Υπερβολές και εκκεντρότητα

Στις Ασκήσεις 17-24, βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής. Έπειτα βρείτε και σχεδιάστε τις εστίες και τις διευθετούσες της υπερβολής.

17. $x^2 - y^2 = 1$
18. $9x^2 - 16y^2 = 144$
19. $y^2 - x^2 = 8$
20. $y^2 - x^2 = 4$
21. $8x^2 - 2y^2 = 16$
22. $y^2 - 3x^2 = 3$
23. $8y^2 - 2x^2 = 16$
24. $64x^2 - 36y^2 = 2304$

Στις Ασκήσεις 25-28 δίνονται οι εκκεντρότητες και οι κορυφές ή οι εστίες υπερβολών με κέντρο στην αρχή στο επίπεδο xy. Σε κάθε περίπτωση, βρείτε την πρότυπη εξίσωση της υπερβολής σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

25. Εκκεντρότητα: 3, κορυφές: $(0, \pm 1)$
26. Εκκεντρότητα: 2, κορυφές: $(\pm 2, 0)$
27. Εκκεντρότητα: 3, εστίες: $(\pm 3, 0)$
28. Εκκεντρότητα: 1,25, εστίες: $(0, \pm 5)$

Εκκεντρότητα και διευθετούσα

Στις Ασκήσεις 29-36 δίνονται οι εκκεντρότητες κωνικών τομών με μια εστία στην αρχή μαζί με την αντίστοιχη διευθετούσα. Βρείτε μια πολική εξίσωση για κάθε κωνική τομή.

29. $e = 1, \quad x = 2$
30. $e = 1, \quad y = 2$
31. $e = 5, \quad y = -6$
32. $e = 2, \quad x = 4$
33. $e = 1/2, \quad x = 1$
34. $e = 1/4, \quad x = -2$
35. $e = 1/5, \quad y = -10$
36. $e = 1/3, \quad y = 6$

Παραβολές και ελλείψεις

Σχεδιάστε τις παραβολές και τις ελλείψεις των Ασκήσεων 37-44. Συμπεριλάβετε τη διευθετούσα που αντιστοιχεί στην εστία στην αρχή. Ονομάστε τις κορυφές των ελλείψεων με κατάλληλες πολικές συντεταγμένες. Ονομάστε επίσης τα κέντρα των ελλείψεων.

37. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$
38. $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$
39. $r = \dfrac{25}{10 - 5\cos\theta}$
40. $r = \dfrac{4}{2 - 2\cos\theta}$
41. $r = \dfrac{400}{16 + 8\sin\theta}$
42. $r = \dfrac{12}{3 + 3\sin\theta}$
43. $r = \dfrac{8}{2 - 2\sin\theta}$
44. $r = \dfrac{4}{2 - \sin\theta}$

Ευθείες

Σχεδιάστε τις ευθείες των Ασκήσεων 45-48 και βρείτε τις καρτεσιανές τους εξισώσεις.

45. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
46. $r\cos\left(\theta + \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$
47. $r\cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3$
48. $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

Βρείτε μια πολική εξίσωση της μορφής $r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$ για κάθε ευθεία των Ασκήσεων 49-52.

49. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$
50. $\sqrt{3}x - y = 1$
51. $y = -5$
52. $x = -4$

Κύκλοι

Σχεδιάστε τους κύκλους των Ασκήσεων 53-56. Δώστε πολικές συντεταγμένες για τα κέντρα τους και αναγνωρίστε τις ακτίνες τους.

53. $r = 4\cos\theta$
54. $r = 6\sin\theta$
55. $r = -2\cos\theta$
56. $r = -8\sin\theta$

Βρείτε πολικές εξισώσεις για τους κύκλους των Ασκήσεων 57-64. Σχεδιάστε κάθε κύκλο στο επίπεδο συντεταγμένων και σημειώστε και τις καρτεσιανές και τις πολικές εξισώσεις.

57. $(x - 6)^2 + y^2 = 36$
58. $(x + 2)^2 + y^2 = 4$
59. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$
60. $x^2 + (y + 7)^2 = 49$
61. $x^2 + 2x + y^2 = 0$
62. $x^2 - 16x + y^2 = 0$
63. $x^2 + y^2 + y = 0$
64. $x^2 + y^2 - \dfrac{4}{3}y = 0$

Παραδείγματα πολικών εξισώσεων

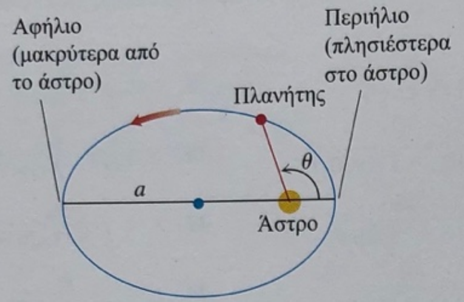
T Σχεδιάστε τις ευθείες και τις κωνικές τομές των Ασκήσεων 65-74.

65. $r = 3\sec(\theta - \pi/3)$
66. $r = 4\sec(\theta + \pi/6)$
67. $r = 4\sin\theta$
68. $r = -2\cos\theta$
69. $r = 8/(4 + \cos\theta)$
70. $r = 8/(4 + \sin\theta)$
71. $r = 1/(1 - \sin\theta)$
72. $r = 1/(1 + \cos\theta)$
73. $r = 1/(1 + 2\sin\theta)$
74. $r = 1/(1 + 2\cos\theta)$

75. Περιήλιο και αφήλιο Ένας πλανήτης κινείται γύρω από το άστρο του σε έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα μήκους a. (Δείτε το παρακάτω σχήμα.)

α. Δείξτε ότι $r = a(1 - e)$ όταν ο πλανήτης βρίσκεται πλησιέστερα στο άστρο και ότι $r = a(1 + e)$ όταν ο πλανήτης βρίσκεται μακρύτερα από το άστρο.

β. Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα του πίνακα της Άσκησης 76 για να βρείτε πόσο κοντά πλησιάζει στον Ήλιο κάθε πλανήτης του δικού μας ηλιακού συστήματος και πόσο απομακρύνεται από αυτόν.



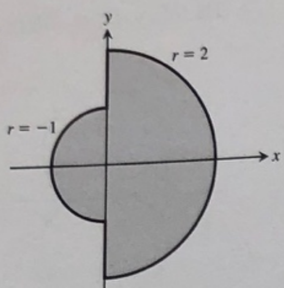
76. Πλανητικές τροχιές Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα και την Εξίσωση (6) για να βρείτε πολικές εξισώσεις για τις τροχιές των πλανητών.

Πλανήτης	Μεγάλος ημιάξονας (αστρονομικές μονάδες)	Εκκεντρότητα
Ερμής	0,3871	0,2056
Αφροδίτη	0,7233	0,0068
Γη	1,000	0,0167
Άρης	1,524	0,0934
Δίας	5,203	0,0484
Κρόνος	9,539	0,0543
Ουρανός	19,18	0,0460
Ποσειδώνας	30,06	0,0082

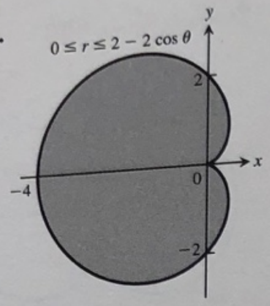
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 Ερωτήσεις επανάληψης

1. Τι είναι παραμετρικοποίηση μιας καμπύλης στο επίπεδο xy; Έχει μια συνάρτηση $y = f(x)$ πάντα παραμετρικοποίηση; Είναι η παραμετρικοποίηση μιας καμπύλης μοναδική; Δώστε παραδείγματα.
2. Δώστε μερικές τυπικές παραμετρικοποιήσεις για ευθείες, κύκλους, παραβολές, ελλείψεις και υπερβολές. Πώς μπορεί να διαφέρει η παραμετρικοποιημένη καμπύλη από τη γραφική παράσταση της καρτεσιανής της εξίσωσης;
3. Τι είναι το κυκλοειδές; Ποιες οι τυπικές παραμετρικές εξισώσεις για κυκλοειδή; Σε ποιες φυσικές ιδιότητες οφείλεται η σπουδαιότητα των κυκλοειδών;
4. Ποιος είναι ο τύπος για την κλίση dy/dx μιας παραμετρικοποιημένης καμπύλης $x = f(t)$, $y = g(t)$; Πότε ισχύει; Πότε αναμένουμε να μπορούμε να βρούμε και το d^2y/dx^2; Δώστε παραδείγματα.
5. Πώς μπορούμε μερικές φορές να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη και έναν άξονα συντεταγμένων;
6. Πώς βρίσκουμε το μήκος μιας λείας παραμετρικοποιημένης καμπύλης $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$; Ποια η σχέση της λειότητας με το μήκος; Τι άλλο χρειάζεται να γνωρίζουμε για την παραμετρικοποίηση για να βρούμε το μήκος της καμπύλης; Δώστε παραδείγματα.
7. Ποια είναι η συνάρτηση μήκους τόξου για μια λεία παραμετρικοποιημένη καμπύλη; Ποιο είναι το διαφορικό μήκους τόξου της;
8. Υπό ποιες συνθήκες μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή μιας καμπύλης $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, ως προς τον άξονα x; Ως προς τον άξονα y; Δώστε παραδείγματα.
9. Τι είναι οι πολικές συντεταγμένες; Ποιες εξισώσεις συνδέουν τις πολικές με τις καρτεσιανές συντεταγμένες; Για ποιον λόγο θα θέλαμε να μεταβούμε από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο;
10. Ποιες οι συνέπειες της μη μοναδικότητας των πολικών συντεταγμένων ως προς τη σχεδίαση καμπυλών; Δώστε ένα παράδειγμα.
11. Πώς σχεδιάζουμε εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες; Συμπεριλάβετε στην απάντησή σας τη συμμετρία, την κλίση, τη συμπεριφορά στην αρχή, και τη χρήση καρτεσιανών γραφημάτων. Δώστε παραδείγματα.
12. Με ποιον τρόπο βρίσκουμε το εμβαδόν ενός χωρίου $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, στο επίπεδο πολικών συντεταγμένων; Δώστε παραδείγματα.
13. Υπό ποιες συνθήκες μπορούμε να βρούμε το μήκος της καμπύλης $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, στο επίπεδο πολικών συντεταγμένων; Δώστε ένα παράδειγμα τυπικού υπολογισμού.
14. Τι είναι η παραβολή; Ποιες είναι οι καρτεσιανές εξισώσεις για παραβολές με κορυφές στην αρχή και εστίες πάνω στους άξονες συντεταγμένων; Πώς μπορούμε να βρούμε την εστία και τη διευθετούσα μιας τέτοιας παραβολής από την εξίσωσή της;
15. Τι είναι η έλλειψη; Ποιες είναι οι καρτεσιανές εξισώσεις για ελλείψεις με κέντρο στην αρχή και εστίες σε έναν από τους άξονες συντεταγμένων; Πώς μπορούμε να βρούμε τις εστίες, τις κορυφές και τις διευθετούσες μιας τέτοιας έλλειψης από την εξίσωσή της;
16. Τι είναι η υπερβολή; Ποιες είναι οι καρτεσιανές εξισώσεις για υπερβολές με κέντρο στην αρχή και εστίες σε έναν από τους άξονες συντεταγμένων; Πώς μπορούμε να βρούμε τις εστίες, τις κορυφές και τις διευθετούσες μιας τέτοιας υπερβολής από την εξίσωσή της;
17. Τι είναι η εκκεντρότητα μιας κωνικής τομής; Πώς μπορούμε να ταξινομήσουμε τις κωνικές τομές με βάση την εκκεντρότητα; Πώς αλλάζει η εκκεντρότητα τη μορφή των ελλείψεων και των υπερβολών;
18. Εξηγήστε την εξίσωση $PF = e \cdot PD$.
19. Ποιες είναι οι πρότυπες εξισώσεις για ευθείες και κωνικές τομές σε πολικές συντεταγμένες; Δώστε παραδείγματα.

29.



31.



33. Εξίσωση (α)

ΕΝΟΤΗΤΑ 11.5

1. $\frac{1}{6}\pi^3$ **3.** 18π

5. $\frac{\pi}{8}$ **7.** 2 **9.** $\frac{\pi}{2} - 1$

11. $5\pi - 8$ **13.** $3\sqrt{3} - \pi$ **15.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

17. $\frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}$ **19. (α)** $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

21. $19/3$ **23.** 8

25. $3\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$ **27.** $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$

31. (α) a **(β)** a **(γ)** $2a/\pi$

ΕΝΟΤΗΤΑ 11.6

1. $y^2 = 8x$, $F(2, 0)$, διευθετούσα: $x = -2$

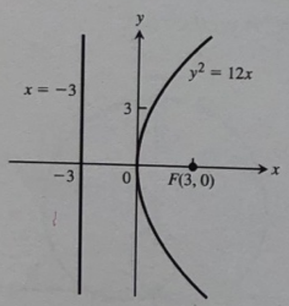
3. $x^2 = -6y$, $F(0, -3/2)$, διευθετούσα: $y = 3/2$

5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $F\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$, $V(\pm 2, 0)$,

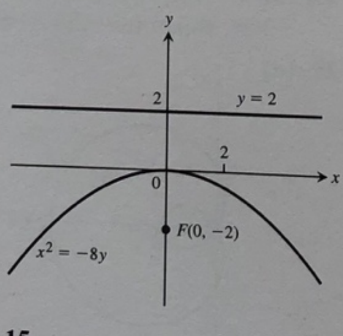
ασύμπτωτες: $y = \pm\frac{3}{2}x$

7. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $F(\pm 1, 0)$, $V\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$

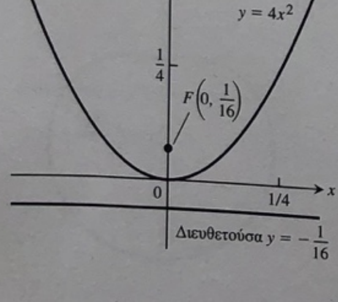
9.



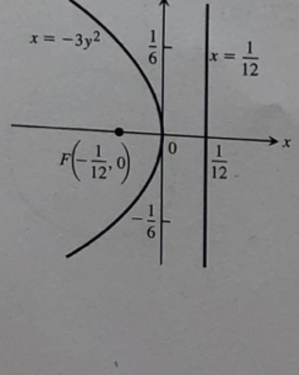
11.



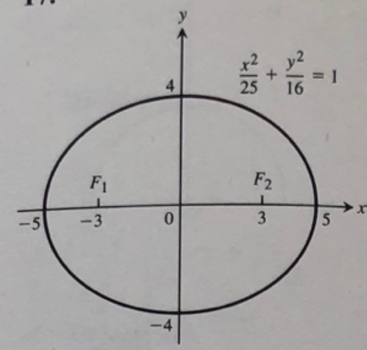
13.



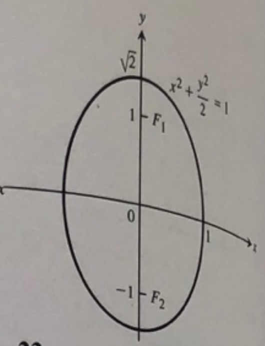
15.



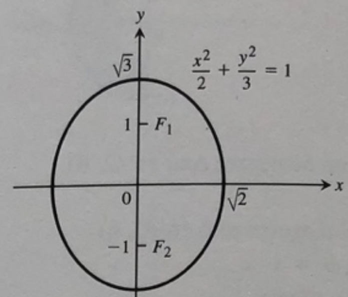
17.



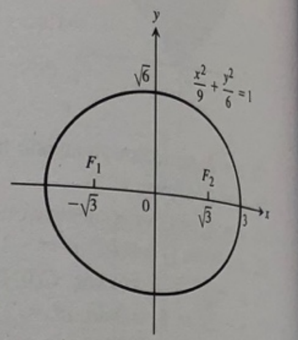
19.



21.

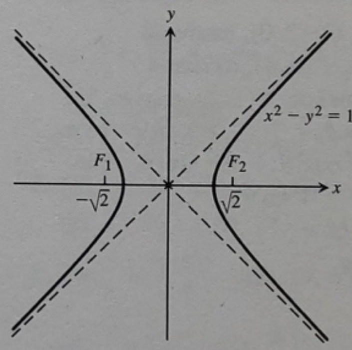


23.

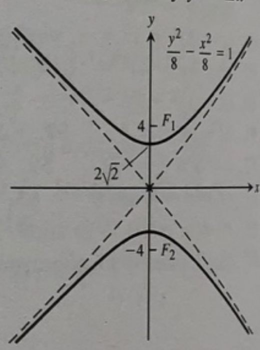


25. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

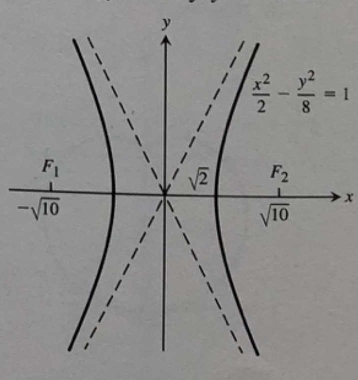
27. Ασύμπτωτες: $y = \pm x$



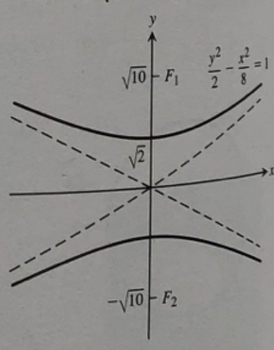
29. Ασύμπτωτες: $y = \pm x$



31. Ασύμπτωτες: $y = \pm 2x$



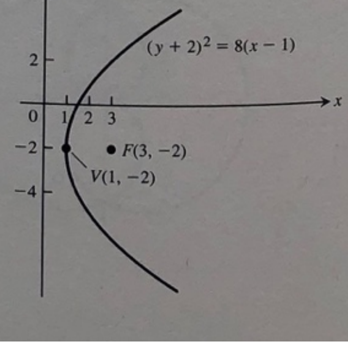
33. Ασύμπτωτες: $y = \pm x/2$



35. $y^2 - x^2 = 1$ **37.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

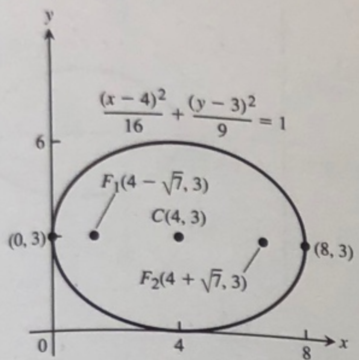
39. (α) Κορυφή: $(1, -2)$, εστία: $(3, -2)$, διευθετούσα: $x = -1$

(β)



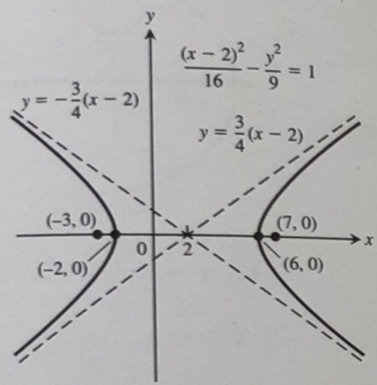
41. (α) Εστίες: $\left(4 \pm \sqrt{7}, 3\right)$, κορυφές: $(8, 3)$ και $(0, 3)$, κέντρο: $(4, 3)$

(β)



43. (α) Κέντρο: $(2, 0)$, εστίες: $(7, 0)$ και $(-3, 0)$, κορυφές: $(6, 0)$ και $(-2, 0)$, ασύμπτωτες: $y = \pm\frac{3}{4}(x - 2)$

(β)



45. $(y + 3)^2 = 4(x + 2)$, $V(-2, -3)$, $F(-1, -3)$, διευθετούσα: $x = -3$

47. $(x - 1)^2 = 8(y + 7)$, $V(1, -7)$, $F(1, -5)$, διευθετούσα : $y = -9$

49. $\frac{(x + 2)^2}{6} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$, $F\left(-2, \pm\sqrt{3} - 1\right)$, $V(-2, \pm 3 - 1)$, $C(-2, -1)$

51. $\frac{(x - 2)^2}{3} + \frac{(y - 3)^2}{2} = 1$, $F(3, 3)$ και $F(1, 3)$, $V\left(\pm\sqrt{3} + 2, 3\right)$, $C(2, 3)$

53. $\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{5} = 1$, $C(2, 2)$, $F(5, 2)$ και $F(-1, 2)$, $V(4, 2)$ και $V(0, 2)$,

ασύμπτωτες: $(y - 2) = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 2)$

55. $(y + 1)^2 - (x + 1)^2 = 1$, $C(-1, -1)$, $F\left(-1, \sqrt{2} - 1\right)$ και $F\left(-1, -\sqrt{2} - 1\right)$, $V(-1, 0)$ και $V(-1, -2)$, ασύμπτωτες $(y + 1) = \pm(x + 1)$

57. $C(-2, 0)$, $a = 4$ **59.** $V(-1, 1)$, $F(-1, 0)$

61. Έλλειψη: $\frac{(x + 2)^2}{5} + y^2 = 1$, $C(-2, 0)$, $F(0, 0)$ και $F(-4, 0)$, $V\left(\sqrt{5} - 2, 0\right)$ και $V\left(-\sqrt{5} - 2, 0\right)$

63. Έλλειψη: $\frac{(x - 1)^2}{2} + (y - 1)^2 = 1$, $C(1, 1)$, $F(2, 1)$ και $F(0, 1)$, $V\left(\sqrt{2} + 1, 1\right)$ και $V\left(-\sqrt{2} + 1, 1\right)$

65. Υπερβολή: $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 1$, $C(1, 2)$, $V(2, 2)$ και $V(0, 2)$, $F\left(1 + \sqrt{2}, 2\right)$ και $F\left(1 - \sqrt{2}, 2\right)$, ασύμπτωτες:$(y - 2) = \pm(x - 1)$

67. Υπερβολή: $\frac{(y - 3)^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$, $C(0, 3)$, $F(0, 6)$ και $F(0, 0)$, $V\left(0, \sqrt{6} + 3\right)$ και $V\left(0, -\sqrt{6} + 3\right)$,

ασύμπτωτες: $y = \sqrt{2}x + 3$ ή $y = -\sqrt{2}x + 3$

69. (β) 1:1 **73.** Μήκος $= 2\sqrt{2}$, πλάτος $= \sqrt{2}$, εμβαδόν $= 4$

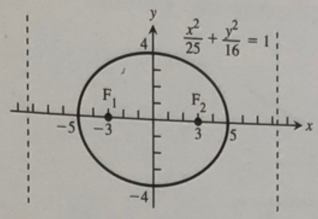
75. 24π

77. $x = 0, y = 0$: $y = -2x$, $x = 0, y = 2$, $y = 2x + 2$, $x = 4, y = 0$: $y = 2x - 8$

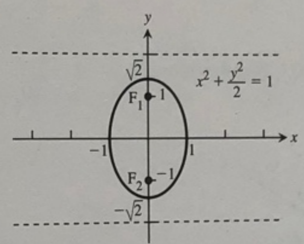
79. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{16}{3\pi}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 11.7

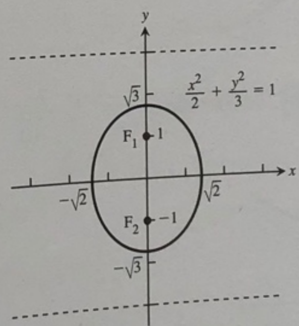
1. $e = \frac{3}{5}$, $F(\pm 3, 0)$, διευθετούσες: $x = \pm\frac{25}{3}$.



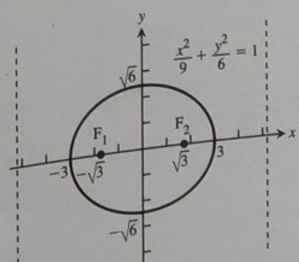
3. $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F(0, \pm 1)$, διευθετούσες: $y = \pm 2$.



5. $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $F(0, \pm 1)$, διευθετούσες: $y = \pm 3$.



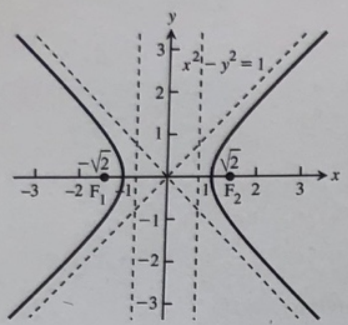
7. $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $F\left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$, διευθετούσες: $x = \pm 3\sqrt{3}$.



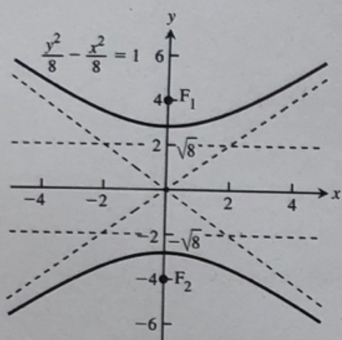
9. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ **11.** $\frac{x^2}{4851} + \frac{y^2}{4900} = 1$

13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **15.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

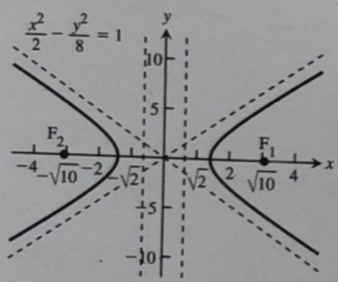
17. $e = \sqrt{2}$, $F\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$, διευθετούσες: $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



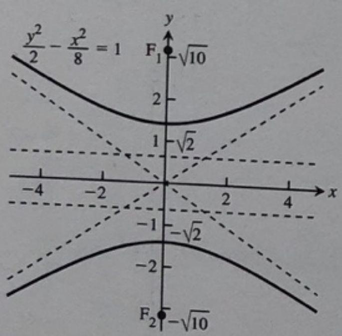
19. $e = \sqrt{2}$, $F(0, \pm 4)$, διευθετούσες: $y = \pm 2$.



21. $e = \sqrt{5}$, $F\left(\pm\sqrt{10}, 0\right)$, διευθετούσες: $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.



23. $e = \sqrt{5}$, $F\left(0, \pm\sqrt{10}\right)$, διευθετούσες: $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.



25. $y^2 - \dfrac{x^2}{8} = 1$ 27. $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$

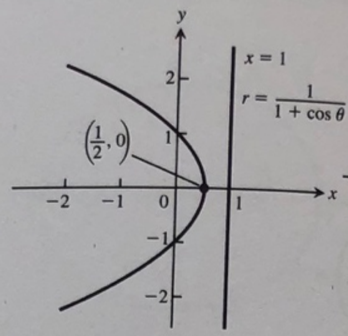
29. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

31. $r = \dfrac{30}{1 - 5\sin\theta}$

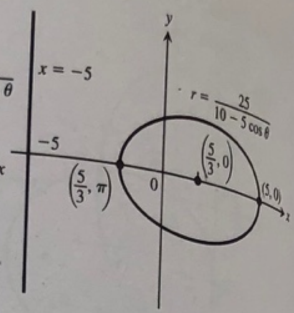
33. $r = \dfrac{1}{2 + \cos\theta}$

35. $r = \dfrac{10}{5 - \sin\theta}$

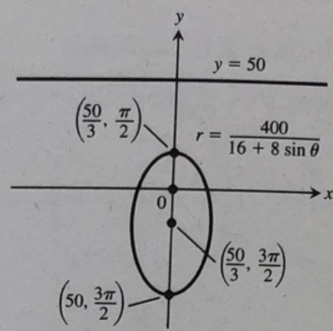
37.



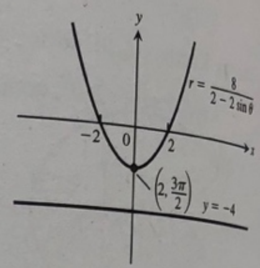
39.



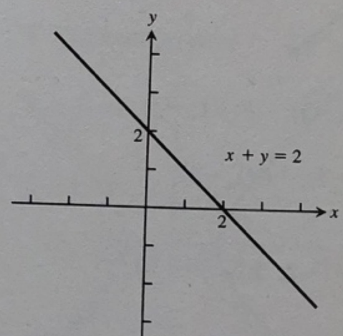
41.



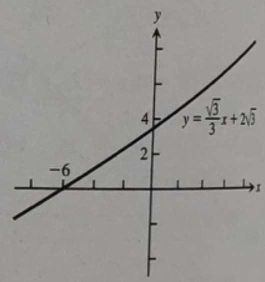
43.



45. $y = 2 - x$

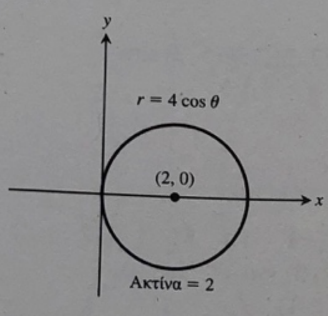


47. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$

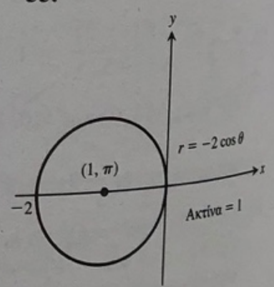


49. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3$ 51. $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = 5$

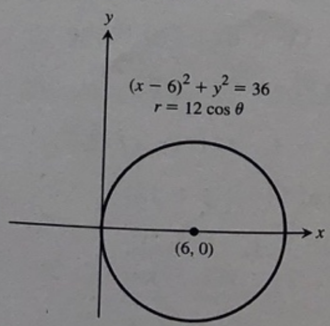
53.



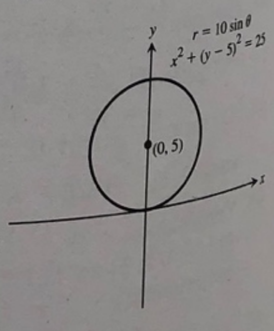
55.



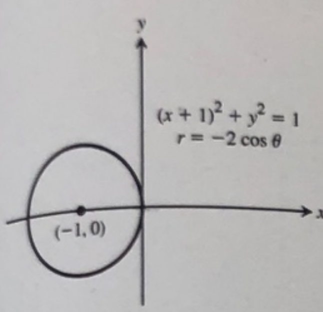
57. $r = 12\cos\theta$



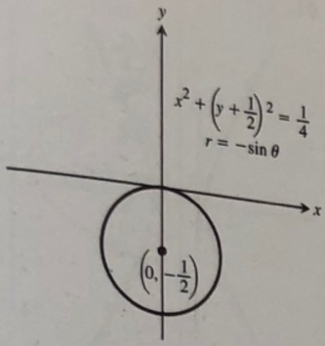
59. $r = 10\sin\theta$



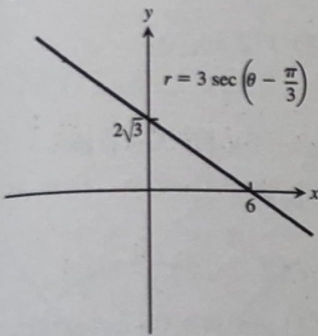
61. $r = -2\cos\theta$



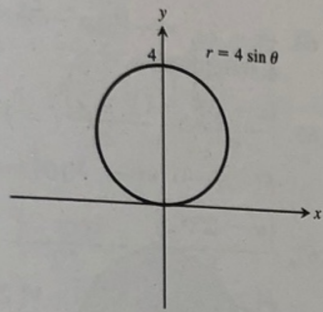
63. $r = -\sin\theta$



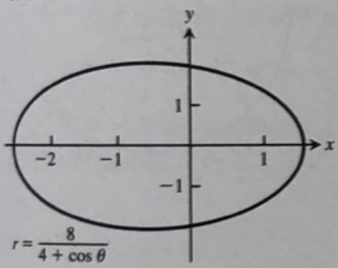
65.



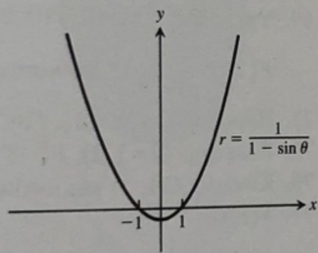
67.



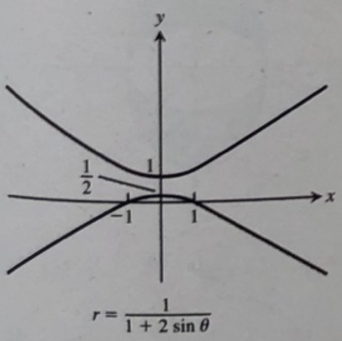
69.



71.



73.

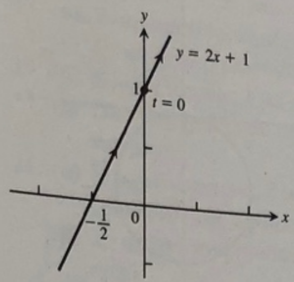


75. (β)

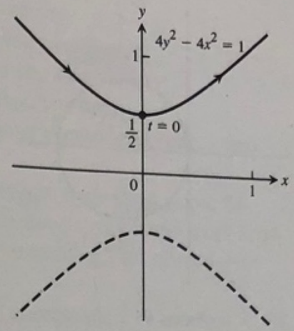
Πλανήτης	Περιήλιο	Αφήλιο
Ερμής	0,3075 AU	0,4667 AU
Αφροδίτη	0,7184 AU	0,7282 AU
Γη	0,9833 AU	1,0167 AU
Άρης	1,3817 AU	1,6663 AU
Δίας	4,9512 AU	5,4548 AU
Κρόνος	9,0210 AU	10,0570 AU
Ουρανός	18,2977 AU	20,0623 AU
Ποσειδώνας	29,8135 AU	30,3065 AU

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

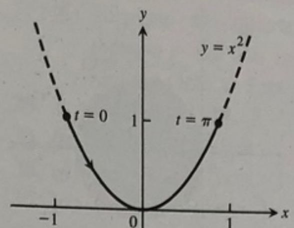
1.



3.



5.



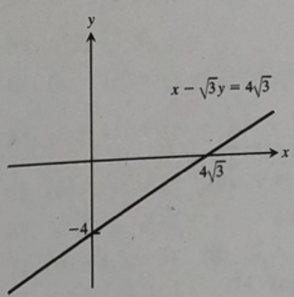
7. $x = 3\cos t, \quad y = 4\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

9. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}$

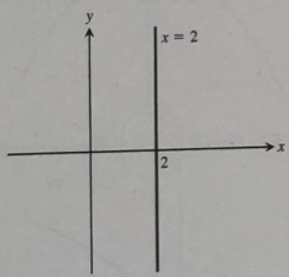
11. (α) $y = \dfrac{\pm|x|^{3/2}}{8} - 1$ (β) $y = \dfrac{\pm\sqrt{1 - x^2}}{x}$

13. $\dfrac{10}{3}$ 15. $\dfrac{285}{8}$ 17. 10 19. $\dfrac{9\pi}{2}$ 21. $\dfrac{76\pi}{3}$

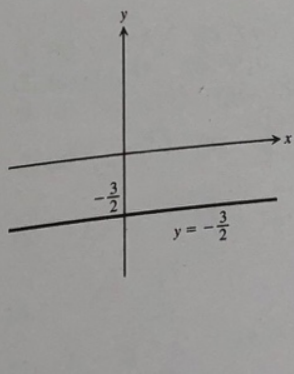
23. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 4$



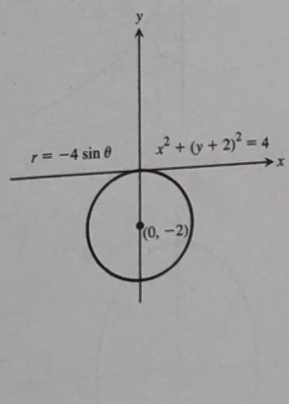
25. $x = 2$



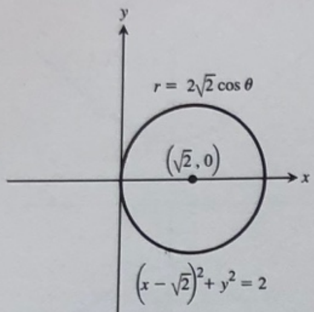
27. $y = -\dfrac{3}{2}$



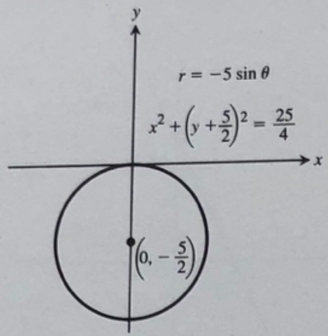
29. $x^2 + (y + 2)^2 = 4$



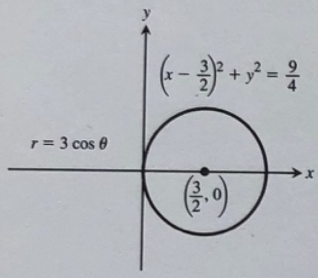
31. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 2$



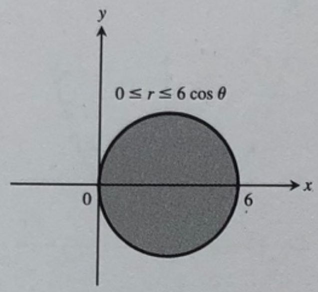
33. $r = -5 \sin \theta$



35. $r = 3 \cos \theta$



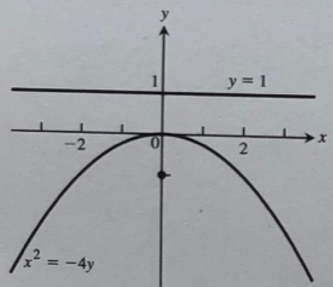
37.



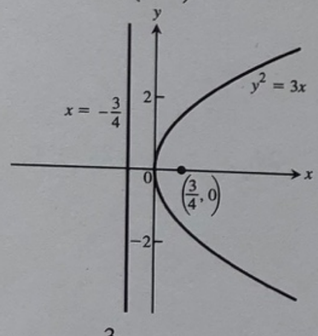
39. δ **41.** ιβ **43.** ια **45.** θ **47.** $\frac{9}{2}\pi$ **49.** $2 + \frac{\pi}{4}$

51. 8 **53.** $\pi - 3$

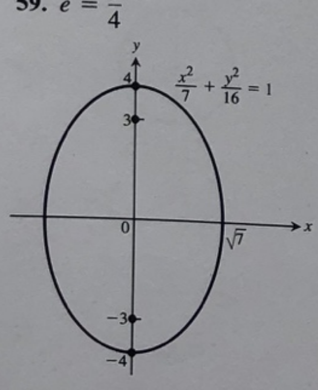
55. Εστία $(0, -1)$, διευθετούσα $y = 1$.



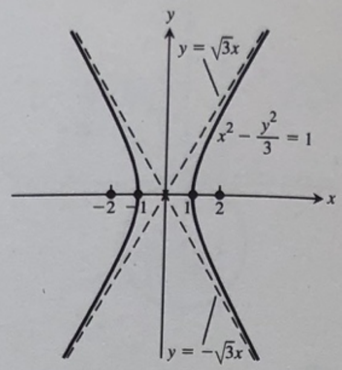
57. Εστία $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, διευθετούσα $x = -\frac{3}{4}$.



59. $e = \frac{3}{4}$



61. $e = 2$, ασύμπτωτες $y = \pm\sqrt{3}x$.



63. $(x - 2)^2 = -12(y - 3)$, $V(2, 3)$, $F(2, 0)$, διευθετούσα $y = 6$.

65. $\dfrac{(x + 3)^2}{9} + \dfrac{(y + 5)^2}{25} = 1$, $C(-3, -5)$, $F(-3, -1)$ και $F(-3, -9)$, $V(-3, -10)$ και $V(-3, 0)$.

67. $\dfrac{\left(y - 2\sqrt{2}\right)^2}{8} - \dfrac{(x - 2)^2}{2} = 1$, $C\left(2, 2\sqrt{2}\right)$, $F\left(2, 2\sqrt{2} \pm \sqrt{10}\right)$, $V\left(2, 4\sqrt{2}\right)$ και $V(2, 0)$, ασύμπτωτες $y = 2x - 4 + 2\sqrt{2}$ και $y = -2x + 4 + 2\sqrt{2}$.

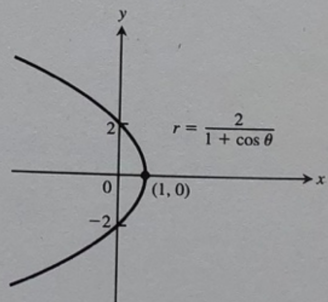
69. Υπερβολή: $C(2, 0)$, $V(0, 0)$ και $V(4, 0)$, εστίες $F\left(2 \pm \sqrt{5}, 0\right)$, ασύμπτωτες $y = \pm\dfrac{x - 2}{2}$.

71. Παραβολή: $V(-3, 1)$, $F(-7, 1)$, διευθετούσα $x = 1$.

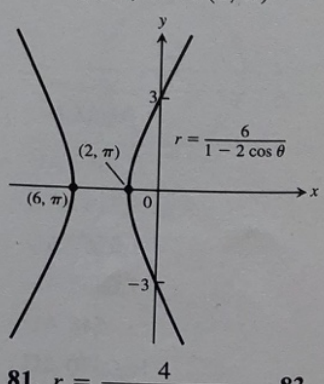
73. Έλλειψη: $C(-3, 2)$, $F\left(-3 \pm \sqrt{7}, 2\right)$, $V(1, 2)$ και $V(-7, 2)$

75. Κύκλος: $C(1, 1)$ και ακτίνα $= \sqrt{2}$

77. $V(1, 0)$



79. $V(2, \pi)$ και $V(6, \pi)$

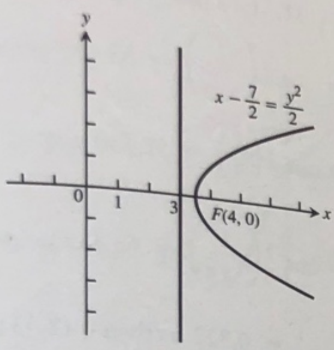


81. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$ **83.** $r = \dfrac{2}{2 + \sin\theta}$

85. **(α)** 24π **(β)** 16π

ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

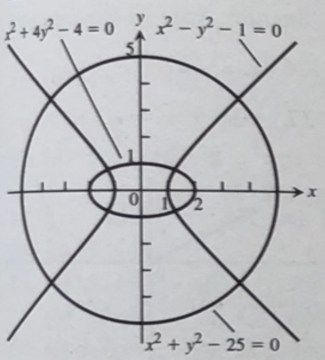
1. $x - \frac{7}{2} = \frac{y^2}{2}$



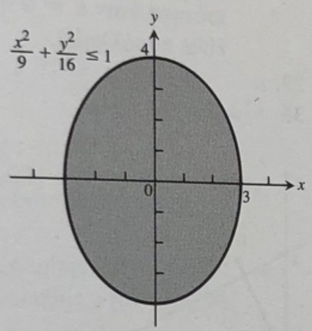
3. $3x^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0$ 5. $F(0, \pm 1)$

7. (α) $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{x^2}{48} = 1$ (β) $\frac{\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{25}{16}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{75}{2}\right)} = 1$

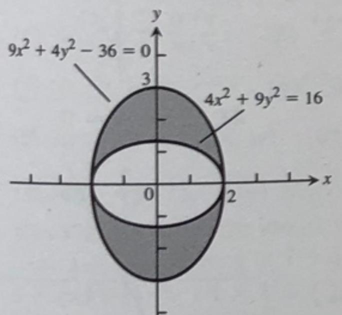
11.



13.



15.



17. (α) $r = e^{2\theta}$ (β) $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$

19. $r = \frac{4}{1 + 2\cos\theta}$ 21. $r = \frac{2}{2 + \sin\theta}$

23. $x = (a + b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$,

$y = (a + b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$

27. $\frac{\pi}{2}$

Κεφάλαιο 12

ΕΝΟΤΗΤΑ 12.1

1. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (2, 3, 0) παράλληλα στον άξονα z
3. Άξονας x
5. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ στο επίπεδο xy
7. Ο κύκλος $x^2 + z^2 = 4$ στο επίπεδο xz
9. Ο κύκλος $y^2 + z^2 = 1$ στο επίπεδο yz
11. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$ στο επίπεδο xy
13. Η έλλειψη που σχηματίζεται από την τομή του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 4$ και του επιπέδου $z = y$
15. Η παραβολή $y = x^2$ στο επίπεδο xy
17. (α) Το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy
(β) Το τέταρτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy
19. (α) Σφαίρα ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή
(β) Όλα τα σημεία που απέχουν περισσότερο από 1 από την αρχή
21. (α) Η σφαίρα ακτίνας 2 με κέντρο στην αρχή χωρίς το εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας 1 με κέντρο στην αρχή
(β) Το στερεό άνω ημισφαίριο ακτίνας 1 με κέντρο στην αρχή
23. (α) Το χωρίο επί ή εντός της παραβολής $y = x^2$ στο επίπεδο xy και όλα τα σημεία πάνω από αυτό
(β) Το χωρίο επί ή αριστερά της παραβολής $x = y^2$ στο επίπεδο xy και όλα τα σημεία που απέχουν 2 μονάδες ή λιγότερο από το επίπεδο xy
25. 3 27. 7 29. $2\sqrt{3}$ 31. (α) 2 (β) 3 (γ) 4
33. (α) 3 (β) 4 (γ) 5
35. (α) $x = 3$ (β) $y = -1$ (γ) $z = -2$
37. (α) $z = 1$ (β) $x = 3$ (γ) $y = -1$
39. (α) $x^2 + (y - 2)^2 = 4, z = 0$
(β) $(y - 2)^2 + z^2 = 4, x = 0$ (γ) $x^2 + z^2 = 4, y = 2$
41. (α) $y = 3, z = -1$ (β) $x = 1, z = -1$
(γ) $x = 1, y = 3$
43. $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 3$ 45. $0 \le z \le 1$ 47. $z \le 0$
49. (α) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 < 1$
(β) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 > 1$
51. $C(-2, 0, 2), a = 2\sqrt{2}$
53. $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), a = \sqrt{2}$
55. $C(-2, 0, 2), a = \sqrt{8}$ 57. $C\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), a = \frac{5\sqrt{3}}{4}$
59. $C(2, -3, 5), a = 7$
61. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 14$
63. $(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{81}$
65. (α) $\sqrt{y^2 + z^2}$ (β) $\sqrt{x^2 + z^2}$ (γ) $\sqrt{x^2 + y^2}$
67. $\sqrt{17} + \sqrt{33} + 6$ 69. $y = 1$
71. (α) $(0, 3, -3)$ (β) $(0, 5, -5)$
73. $z = x^2/4 + 1$ 75. (α) $z^2 = x^2$ (β) $y^2 = x^2$

ΕΝΟΤΗΤΑ 12.2

1. (α) $\langle 9, -6\rangle$ (β) $3\sqrt{13}$
3. (α) $\langle 1, 3\rangle$ (β) $\sqrt{10}$
5. (α) $\langle 12, -19\rangle$ (β) $\sqrt{505}$
7. (α) $\left\langle \frac{1}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$ (β) $\frac{\sqrt{197}}{5}$ 9. $\langle 1, -4\rangle$
11. $\langle -2, -3\rangle$ 13. $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$
15. $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$
17. $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 19. $-3\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$
21. $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
23. Το διάνυσμα **v** είναι οριζόντιο και έχει μήκος 1 cm. Τα διανύσματα **u** και **w** έχουν μήκος $\frac{11}{16}$ cm. Το **w** είναι κατακόρυφο και το **u** σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια. Όλα πρέπει να σχεδιαστούν σε κλίμακα.